

ЛЕКЦІЯ 5

Задачі гідро-газодинаміки, розрахунок течій в ущільненнях. Зв'язаний аналіз, рішення задачі гідропружності для ущільнень.

Течія і теплоперенесення у каналах. Загальні характеристики течії у каналах

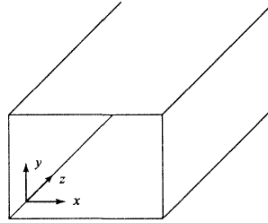


Рисунок 14 - Канал прямокутного перетину

Хоча канали можуть мати будь-яку геометричну форму, для простоти розглянемо прямий канал прямокутного поперечного перетину, зображений на рис. 14. Течія в основному направлена уздовж осі z (назвемо її поздовжньою координатою на відміну від поперечних координат x і y). Серед трьох компонент швидкості u , v і w поздовжня складова w звичайно набагато більше поперечних u і v . Течія викликається градієнтом тиску $\partial p / \partial z$, який звичайно від'ємний. Тиск практично постійний у поперечному перетині і змінюється уздовж осі z .

Оскільки зміна швидкості і температури по осі z мала в порівнянні зі змінами їх по осі x або y , то дуже часто нехтують в'язким напруженням, яке викликане градієнтом $\partial w / \partial z$ і перенесенням тепла за рахунок градієнта $\partial T / \partial z$. При цьому, звичайно, член $\partial p / \partial z$ в рівнянні для поздовжньої складової швидкості вважають таким, що дорівнює $\partial \bar{p} / \partial z$, де \bar{p} відповідає середньому значенню тиску в поперечному перетині. Течія у каналі може бути стаціонарною або нестаціонарною. Будемо розглядати тільки стаціонарну течію.

Початкова ділянка і повністю розвинена течія

Розглянемо течію (рис. 15) рідини у каналі при однорідному полі швидкості w на вході. У міру того як рідина рухається уздовж каналу, течія біля стінки сповільнюється через тертя об стінки. Швидкість течії в ядрі потоку залишається постійною по перетину, але збільшується уздовж каналу. При цьому відбувається перетікання рідини від пристінкової області в ядро потоку. Приграничні шари біля стінок каналу поступово зростають і врешті-решт зливаються. На цьому етапі ядро потоку зникає і у всьому поперечному перетині переважають ненульові градієнти швидкостей. До цього моменту розвиток профілю швидкості завершується і поле течії для всіх подальших перетинів стає незалежним від поздовжньої координати z . Градієнт тиску $\partial \bar{p} / \partial z$ також перестає змінюватися уздовж осі z .

Область течії, в якій компоненти швидкості не залежать від поздовжньої координати, називається областю *повністю гідродинамічно розвиненої течії*. Область, в якій розподіл швидкості визначається геометричною формою каналу і приходить у відповідність до тертя на стінках, називається *початковою ділянкою*.



Рисунок 15 - Розвиток течії

Задачі про течії в прямокутному каналі є в загальному випадку тривимірними. Проте для області повністю розвинутої течії задача стає двовимірною, оскільки зміни швидкості уздовж координати z відсутні (для двовимірних течій, наприклад, у каналі круглого перетину або у плоскопаралельному каналі, задача про повністю розвинену течію стає одновимірною). Можна одержати розв'язок відразу для повністю розвинутої течії, не розглядаючи початкової ділянки. Таким чином, обмежуючись повністю розвинутою течією, ми зменшуємо розмірність задачі і виграємо за рахунок набагато простіших обчислень.

У багатьох практичних задачах довжина каналу набагато більше його поперечних розмірів. Таким чином, початкова ділянка займає тільки невелику частину довжини каналу. У такому разі розумно розглядати весь канал, ґрунтуючись на повністю розвиненій течії. Тому аналіз повністю розвинених течій має істотне практичне значення.

Розглянемо, що відбувається з поперечними компонентами швидкості в області повністю розвинутої течії. У ситуації, показаній на рис. 1.5, течія стає строго поздовжньою, і поперечні швидкості u і v дорівнюють нулю. Проте існують складніші течії, при яких поперечні швидкості не дорівнюють нулю і у області повністю розвинутої течії. Подібна особливість спостерігається при течіях в криволінійних або каналах, які обертаються, а також при течіях з вільною конвекцією і при деяких турбулентних течіях в каналах некруглого поперечного перетину. Залежно від того, дорівнюють поперечні компоненти швидкості нулю чи ні, повністю розвинені течії можуть бути розділені на прості і складні.

Складна повністю розвинена течія у каналі характеризується такими залежностями:

$$u = u(x, y); v = v(x, y); w = w(x, y). \quad (43)$$

Помітимо, що швидкості u , v і w не залежні від поздовжньої координати z , при цьому швидкості u і v можуть бути ненульовими, навіть якщо вони не залежать від z .

Прості повністю розвинені течії у каналі визначаються таким чином:

$$u = 0; v = 0; w = w(x, y). \quad (44)$$

Ще однією характеристикою простої повністю розвинутої течії є те, що тиск постійний по поперечному перетину і змінюється лінійно уздовж поздовжньої координати, тобто

$$p = p(z); dp/dz = const. \quad (45)$$

Як ми скоро побачимо, тільки *прості* повністю розвинені течії описуються рівнянням типу рівнянь теплопровідності. Для *складних* повністю розвинених течій також можна спростити обчислення за рахунок зменшення розмірності, але через наявність поперечних швидкостей потрібне включення в основні диференціальні рівняння конвективних членів. Для визначення цих швидкостей необхідне розв'язання взаємозв'язаних рівнянь руху і нерозривності у поперечному перетині, що є дуже складною задачею.

Прості повністю розвинені течії звичайно реалізуються далі входу в прямі канали постійного поперечного перетину. Щоб течія залишалася повністю розвинутою, такі властивості рідини, як в'язкість і густина (а також теплопровідність і теплоємність при тому, що далі розглядається повністю розвинене теплоперенесення), повинні залишатися постійними. Що стосується геометричної форми, то поперечний перетин каналу може бути представлений в декартовій (x, y) або полярній (θ, r) системі координат. Осесиметрична система координат (x, r) при аналізі течій у каналах не використовується, в цій системі координат можна представити заокруглений (зігнутий) канал прямокутного поперечного перетину, але це призведе до складної течії.

Математичне поставлення задачі визначення поля швидкості

Основні рівняння. У разі стаціонарної ламінарної тривимірної течії у каналі рівняння для складової швидкості уздовж осі z може бути записане у вигляді

$$\rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (46)$$

де у лівій частині представлені конвективні члени, а в правій - члени, які відповідають в'язким напруженням і градієнту тиску. За допомогою виразів (43)-(45) для простої повністю розвиненої течії, яка тут і розглядається, перетворюємо (46) до вигляду

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (47)$$

З фізичної точки зору це рівняння є балансом між тиском і в'язким напруженням, що викликається змінами w по перетину. Цікаво, що у виразі (47) відсутня густина рідини. Помітимо також, що $\partial p / \partial z$ - просто константа у всьому поперечному перетині. Видно, що (47) відповідатиме стаціонарному рівнянню, якщо зробити такі заміни:

$$\phi = w; \Gamma = \mu; S = dp/dz. \quad (48)$$

Таким чином, розрахунок поля поздовжньої швидкості з математичної точки зору подібний розв'язку задачі теплопровідності з постійною швидкістю генерації тепла.

Безрозмірна форма. Для знаходження параметрів, що визначають поле швидкості, корисно представити (47) у безрозмірному вигляді. При сталій в'язкості це рівняння зручно записати як

$$0 = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right) + 1 \quad (49)$$

де безрозмірні координати X і Y мають вигляд

$$X = x/D; Y = y/D. \quad (50)$$

Тут D - деякий характерний розмір поперечного перетину каналу, наприклад, діаметр або радіус круглого каналу, довжина однієї із сторін прямокутного перетину каналу або гідравлічний діаметр. Безрозмірна швидкість

$$W = \frac{\mu w}{-(dp/dz)D^2} \quad (51)$$

При течії в каналі тиск p зменшується уздовж осі z . Тому величина $\partial p / \partial z$ додатна.

Оскільки вираз (51) не містить параметрів, то його розв'язання залежить тільки від граничних умов. Вони задаються геометричними характеристиками каналу і вимогою, щоб швидкість w на стінках дорівнювала нулю. Таким чином, розподіл безрозмірної швидкості W залежить тільки від форми каналу (а не від фізичних розмірів) і не залежить від значень в'язкості, перепаду тиску, числа Рейнольдса та ін. Розмірна швидкість w може бути знайдена за (51) при підстановці конкретних значень в'язкості, градієнта тиску і характерного розміру.

Інтегральні характеристики течії

Течія у каналі звичайно характеризується деякими спеціальними величинами і параметрами. Розглянемо деякі з них.

Деякі корисні визначення. Гідравлічний діаметр поперечного перетину каналу розраховується за формулою

$$D_h = 4A/P \quad (52)$$

де A - площа поперечного перетину; P - змочений периметр (довжина тієї границі, на якій рідина стикається зі стінками каналу). Число 4 в (52) використовується для того, щоб зробити гідравлічний діаметр D_h круглої труби таким, що дорівнює рівним діаметру цієї

труби. Для каналу квадратного поперечного перетину D_h дорівнює довжині сторони квадрата.

Середня швидкість \bar{w} в поперечному перетині каналу визначається так, щоб об'ємна витрата через канал дорівнювала

$$\bar{w} = \frac{\iint w dx dy}{A} = \frac{\iint w dx dy}{\iint dx dy} \quad (53)$$

Тут подвійні інтеграли позначають інтегрування по поперечному перетину каналу.

Число Рейнольдса для течії в каналі визначається виразом

$$Re = \frac{\rho \bar{w} D_h}{\mu}, \quad (54)$$

де ρ і μ - густина і в'язкість рідини.

Безрозмірною характеристикою градієнта тиску є коефіцієнт тертя f , який визначається трьома-чотирма різними способами. Надалі використовуватимемо такий вираз:

$$f = \frac{(dp/dz) D_h}{(1/2) \rho \bar{w}^2} \quad (55)$$

Потрібно бути дуже уважним при порівнянні значень, одержаних за (55), із значеннями, які знайдені за іншими джерелами. Інші способи визначення, які трапляються часто, дають значення f в 2 або 4 рази менші, ніж розраховані за (55).

Повністю розвинена течія. З (51), (54) і (55) випливає, що

$$f Re = 2(D_h / D^2) / \bar{W} \quad (56)$$

де \bar{W} - безрозмірна середня швидкість згідно з (51). Після отримання W у вигляді функції від X і Y можна розрахувати \bar{W} за формулою, аналогічною (53). Оскільки \bar{W} залежить тільки від форми каналу, як і відношення D_h / D , то з (56) випливає, що для повністю розвиненої ламінарної течії добуток $f Re$ постійний для каналу заданої форми. Значення $f Re$ для круглої труби дорівнює 64, а для плоскопаралельного каналу - 96.

Хоча W є прийнятною безрозмірною швидкістю для отримання (49), іншою корисною безрозмірною величиною може бути w/\bar{w} . Для каналу деякої заданої форми існує універсальний розподіл w/\bar{w} .

Важливість інтегральних параметрів. Чисельний розрахунок поля швидкості в каналі закінчується, коли розв'язане рівняння (47) або (51). Обчислення значень величин \bar{W} або $f Re$ є просто подальшою обробкою результатів. Ви повинні розуміти, що така обробка не істотна для основної задачі отримання поля швидкості. Вона проводиться для подання результатів у формі, яка є звичною і знайомою інженерам. На практиці значно поширені різні визначення коефіцієнта тертя і відповідних величин. Жодне з них не повинне розглядатися як найбільш правильне або найбільш головне. Коли між визначенням величини і її розрахованим значенням підтримується належна відповідність, може мати місце будь-яке подання результатів.