ЛЕКЦІЯ 6

Тепловий аналіз ущільнень.

Повністю розвинений теплообмін

Попереднє ознайомлення. Точно так, як і поле швидкості в каналі має початкову ділянку і область повністю розвиненої течії, поле температури характеризується аналогічними тенденціями. На рис. 1.6 показані профілі температури у різних поперечних перетинах каналу. Рідина втікає в канал, маючи постійну температуру. Потім біля стінок каналу формуються і поступово збільшуються температурні приграничні шари. У результаті профіль температури по перетину встановлюється і не змінюється уздовж координати z. Ділянку, де температура *T= T(x, y)* і $\partial T/\partial z = 0$, можна розглядати як область повністю розвиненого теплообміну, але, як буде показано далі, це визначення обмежує область застосування аналізу повністю розвиненого теплообміну досить нецікавими випадками.

У ситуації, показаній на рис. 16, рідина одержує тепло від верхньої стінки і втрачає його на нижній. У області повністю розвиненого теплообміну рідина інтегрально не одержує і не втрачає тепло (от чому температура не змінюється уздовж осі z). У цій області рух рідини абсолютно не впливає на розподіл температури. Задача вироджується в просту задачу стаціонарної теплопровідності у поперечному перетині без яких-небудь джерел тепла. Така задача легко розв'язується, але вона не відповідає реальній ситуації. При течіях в каналах звичайно має місце охолодження або нагрів рідини.

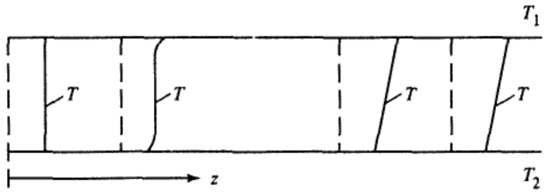

Рисунок 16 - Розвиток нуля температури

Якщо рідина в каналі піддається охолодженню або нагріву, то температура *T* повинна змінюватися уздовж осі z. Але навіть в цьому випадку для поля температури можна ввести поняття області повністю розвиненого теплообміну.

Область повністю розвиненого теплообміну. Коли деяка безрозмірна температура Θ стає незалежною від z, хоча *T* продовжує залежати від *x, y* і z, поле температури розглядатиметься як повністю розвинене. Таким чином, для області повністю розвиненого теплообміну

$$\Theta = \Theta(x, y) \tag{57}$$

Це означає, що *форма* температурного профілю залишається постійною при різних значеннях z. Іншими словами, дана область повністю розвиненого теплообміну характеризується постійним коефіцієнтом тепловіддачі.

Оскільки на поле температури впливають швидкості в каналі, то важливою умовою існування області повністю розвиненого теплообміну є повністю розвинене поле швидкості. Для того щоб підсумкове поле температури мало незмінну форму, необхідна деяка міра регулярності теплових граничних умов.

Математичне поставлення задачі визначення поля температури

Диференціальне рівняння. Рівняння енергії для стаціонарної повільної течії в каналі без в'язкої дисипації записується у вигляді

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{dT}{dy}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) \tag{58}$$

де c_p - питома теплоємність при постійному тиску; k - теплопровідність рідини. Ліва частина (58) відповідає конвективному перенесенню ентальпії в каналі, а члени правої частини описують теплопровідність у рідині. Оскільки звичайно перенесення тепла уздовж осі z дуже мале в порівнянні з перенесенням в поперечному його перетині, то останнім членом у рівнянні (58) можна нехтувати. При простій повністю розвиненій течії у каналі поперечні швидкості u і υ дорівнюють нулю, тому (58) спрощується і набуває вигляду

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{dT}{dy}\right) \tag{59}$$

Рівняння (58) відповідає стаціонарній формі узагальненого диференціального рівняння при такій заміні:

$$\phi = T \text{ ; } \Gamma = k \text{ ; } S = -\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} \tag{60}$$

Таким чином, аналіз теплообміну в каналі зводиться до розв'язання задачі типу задачі теплопровідності при формальному розгляді конвективного перенесення уздовж каналу у вигляді джерельного члена. Звичайно, задача може бути розв'язана в тому випадку, якщо заданий джерельний член. Це означає, що похідна $\partial T/\partial z$ повинна бути задана або знайдена з наявної інформації. Така можливість з'являється, коли профілі температури схожі при різних z. Розподіл w в (60) передбачається відомим з аналізу повністю розвиненого поля швидкості.

Деякі корисні визначення. Нехай q_w позначає локальну густину теплового потоку на стінці каналу. У загальному випадку ця густина потоку нестала по всьому периметру каналу, через який здійснюється теплообмін. Через Q_w позначимо сумарний тепловий потік на одиницю поздовжньої довжини каналу. Отже,

$$Q_w = \int q_w ds \tag{61}$$

де s - ділянка периметра поперечного перетину каналу; інтегрування проводиться по всій ділянці периметра, що обігрівається.

Середня температура рідини в заданому поперечному перетині звичайно визначається у вигляді так званої средньомасової температури, яка визначається виразом

$$T_b = \frac{\iint \rho c w T dxdy}{\iint \rho c w dxdy} \tag{62}$$

Інтегрування проводиться по всьому перетину каналу. Для сталих ρ і c_p вираз спрощується:

$$T_b = \frac{\iint wTdxdy}{\overline{w}A} \tag{63}$$

де $\overline{w}$ - середня швидкість; A - площа поперечного перетину каналу. Зручність такого визначення T_b полягає у тому, що сумарний потік ентальпії через перетин каналу може бути розрахований як $(\rho\overline{w}A)c_p T_b$.

Локальний коефіцієнт тепловіддачі h в деякій точці на стінці каналу визначається виразом

$$h = q_w/(T_w - T_b) \tag{64}$$

де T_w - локальна температура стінки. Можна також задати формулу для коефіцієнта тепловіддачі, що базується на середній або будь-якій іншій температурі стінки. Середній коефіцієнт тепловіддачі $\bar{h}$ випливає у результаті усереднювання локальних значень h або на підставі середньої густини теплового потоку $\bar{q}_w$ і середньої температури стінки $\bar{T}_w$. Хоча може бути використане будь-яке з цих визначень, все ж таки бажано застосувати те, яке дозволить легко розрахувати фізичну величину, яка нас цікавить.

Безрозмірною формою коефіцієнта тепловіддачі є число Нуссельта. Воно визначається як

$$Nu = hD/k\,, \tag{65}$$

де D - характерний розмір поперечного перетину каналу; k - теплопровідність рідини.

Середнє число Нуссельта $\overline{Nu}$ розраховується за $\bar{h}$ аналогічно. Використовуючи значення Nu або $\overline{Nu}$, що трапляються у літературі, необхідно уважно вивчити визначення, на яких вони базуються. Інакше можуть мати місце деякі помилкові обчислення. Необхідно запам'ятати, що в більшості випадків немає негативних або позитивних визначень - вони просто різні.

Один із способів визначення області повністю розвиненого теплообміну полягає у вимозі, щоб коефіцієнт тепловіддачі h або число Нуссельта Nu не залежали від координати z. Число Нуссельта для повністю розвиненого теплообміну при ламінарній течії є величиною постійною, яка не залежить від чисел Рейнольдса і Прандтля. Воно залежить тільки від геометричних особливостей каналу і граничних умов для температури.

Існують чотири види граничних умов для температури, які часто трапляються і при яких реалізується область повністю розвиненого теплообміну.

Постійна локальна густина теплового потоку. Коли заданий розподіл локальної густини теплового потоку q_w по периметру каналу, який залишається незмінним уздовж осі z, то у області повністю розвиненого теплообміну температури в усіх точках поперечного перетину змінюються по z однаково і лінійно, тобто

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{dT_w}{dz} = \frac{dT_b}{dz} = const\,. \tag{66}$$

Іншими словами, розподіл температури в деякому перетині може бути одержаний додаванням константи до температури в іншому перетині.

Для дотримання балансу енергії для каналу необхідно, щоб приріст потоку ентальпії на одиниці подовжньої довжини каналу дорівнював потоку тепла, який підведений через стінки цієї ділянки каналу. Таким чином,

$$Q_w = \rho \bar{w} A c_p \frac{dT_b}{dz} \tag{67}$$

Отже, значення, необхідне в (60), може бути набуте за (67) при відомому Q_w. Якщо ж відомо $\partial T/\partial z$, то за рівнянням (67) можна розрахувати Q_w.

Щоб показати незалежність розподілу безрозмірної температури від такого параметра, як число Рейнольдса або число Прандтля, зробимо так. Член у лівій частині (60) можна записати у вигляді

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{w}{\bar{w}} \rho c_p \bar{w} \frac{dT_b}{dz} \tag{68}$$

Використовуючи цей вираз, можна перетворити рівняння (68) до зручної безрозмірної форми

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}+\frac{w}{\overline{w}}=0, \qquad (69)$$

де безрозмірні координати X і Y задані, а безрозмірна температура

$$\Theta=\frac{T_w-T}{(\overline{w}D^2/\alpha)(dT_b/dz)}. \qquad (70)$$

Тут α - температуропровідність, яка визначається за формулою

$$\alpha=k/(\rho c_p); \qquad (71)$$

T_w - температура стінки в деякій точці периметра каналу. Рівняння (69) відповідає (44) з джерельним членом, який відомий з розв’язку рівняння руху.

Якщо середнє число Нуссельта $\overline{Nu}$ визначене як

$$\overline{Nu}=\frac{D}{k(T_w-T_b)}\frac{Q_w}{P}, \qquad (72)$$

де P - ділянка периметра каналу, яка обігрівається, то з (67), (70) можна одержати

$$\overline{Nu}=\frac{1}{\Theta_b}\frac{A}{PD} \qquad (73)$$

Тут Θ_b - безрозмірна температура, яка відповідає T_b. Оскільки для каналу із заданими формою і розподілом теплового потоку на стінках рівняння (69) має єдиний розв’язок, то число Нуссельта у вигляді (73) є константою, яка не залежить від чисел Рейнольдса і Прандтля (локальне число Нуссельта в загальному випадку змінюватиметься по периметру в результаті зміни локальної густини теплового потоку, а також унаслідок геометричних особливостей поперечного перетину каналу).

Можна визначити безрозмірну температуру, грунтуючись на T_w і T_b у вигляді $(T-T_w)/(T_b-T_w)$. Ця температура аналогічна безрозмірній швидкості $w/\overline{w}$.

Постійна лінійна густина теплового потоку уздовж каналу при сталій температурі стінок. Якщо стінки каналу мають велику теплопровідність, то за її рахунок їх температура у заданому перетині каналу стане постійною. У цьому випадку невідома локальна зміна густини теплового потоку q_w, але задане постійне значення Q_w.

Рівняння (66) - (73) тут також справедливі з урахуванням того, що T_w - постійна температура стінки.

Постійна температура по периметру і довжині каналу

Коли стінки каналу мають постійну температуру по його периметру і довжині, то формується область повністю розвиненого теплообміну іншого типу. У такій ситуації рідина продовжує нагріватися або охолоджуватися до того часу, поки її температура не досягне температури стінок. У випадках, розглянутих раніше, незмінними залишаються різниця температур T_w-T_b і відповідний тепловий потік Q_w. При сталій температурі стінок різниця температур і тепловий потік експоненціально зменшуються уздовж осі z.

Області повністю розвиненого теплообміну характеризуються подібними формами профілів температури, тобто відношення $(T_w-T)/(T_w-T_b)$ не залежить від z. Іншими словами, хоча різниця температур T_w-T спадає по осі z, різниця T_w-T_b зменшується з тією самою швидкістю. Оскільки

$$\frac{T_w - T}{T_w - T_b} = f(x, y) \tag{74}$$

то

$$\ln(T_w - T) - \ln(T_w - T_b) = \ln[f(x, y)]. \tag{75}$$

Диференціюючи (75) по z, одержуємо

$$\frac{1}{T_w - T}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{T_w - T_b}\frac{\partial T_b}{\partial z}. \tag{76}$$

Таким чином,

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{T_w - T}{T_w - T_b}\frac{\partial T_b}{\partial z}. \tag{77}$$

Якщо відомо dT_b/dz, то локальне значення dT/dz може бути розраховане відповідно до (77). Співвідношення між dT_b/dz і Q_w (див. (67)) залишається справедливим і в цьому випадку. Тому якщо відомо Q_w, може бути знайдено і dT_b/dz.

При розв'язанні (57) вираз для джерельного члена (60) може бути записаний у вигляді

$$S = -\rho c_p w \frac{T_w - T}{T_w - T_b}\frac{\partial T_b}{\partial z}. \tag{78}$$

Через наявність *T* в (78), з'являється необхідність ліанеризувати джерельний член $\bar{S} = S_c + S_p \phi_p$, припустивши, що

$$S_c = -\frac{\rho c_p w T}{T_w - T_b}\frac{dT_b}{dz} \tag{79}$$

$$S_P = -\frac{\rho c_p w}{T_w - T_b}\frac{dT_b}{dz}. \tag{80}$$

Проте це призводить до додатного S_p, оскільки коли $(T_w - T_b) > 0$, то $dT_b/dz > 0$. Але для забезпечення збіжності ітераційного процесу небажано використовувати додатні значення S_p. Тому рекомендується таке подання джерельного члена:

$$S_c = -\rho c_p w \frac{T_w - T}{T_w - T_b}\frac{\partial T_b}{\partial z}; \tag{81}$$

$$S_p = 0. \tag{82}$$

Звичайно, S_c розраховується на кожній ітерації за значеннями T і T_b, відомими з попередньої ітерації. Добре, що цей ітераційний процес збігається дуже швидко. Це пояснюється тим, що відношення $(T_w - T)/(T_w - T_b)$ залежить тільки від розподілу температури, а не від абсолютного значення T. Тому розв'язання, розпочате навіть з довільного наближення, сходиться досить швидко.

Рівняння (57) можна записати у безрозмірному вигляді:

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial X^2}+\frac{\partial^2\Theta}{\partial Y^2}+\frac{w}{\overline{w}}\frac{\Theta}{\Theta_b}=0\,, \tag{83}$$

де Θ визначається за (70). Необхідно помітити, що оскільки T_w-T і dT_b/dz спадають по осі z, безрозмірна температура залишається незалежною від z. Граничною умовою для (83) є значення Θ на стінці, що дорівнює нулю.

Число Нуссельта для випадку постійної температури на стінках визначається також за (73). З цього випливає, що Nu залежить тільки від форми поперечного перетину каналу і не залежить від інших параметрів.

Постійний зовнішній коефіцієнт тепловіддачі. Розширенням граничної умови з постійною температурою стінок є випадок, коли канал поміщений в осередок з постійною температурою T_∞ і обмінюється з нею теплом відповідно до виразу

$$q_w=h_e\left(T_\infty-T_w\right), \tag{84}$$

де h_e - постійний коефіцієнт тепловіддачі, заданий на зовнішній поверхні каналу. В цьому випадку поставлення задачі аналогічне розглянутій у попередньому пункті. Єдина відмінність полягає у тому, що замість T_w потрібно використовувати T_∞ (температура T_w не залишається постійною, а експоненціально наближається до T_∞). Таким чином, безрозмірна температура Θ визначається як

$$\Theta=\frac{T_\infty-T}{(\overline{w}D^2/\alpha)(dT_b/dz)} \tag{85}$$

і задовольняє (83).

Гранична умова, задана через зовнішній коефіцієнт тепловіддачі і постійну температуру навколишнього середовища, може розглядатися як гранична умова загального вигляду, з якого можна вивести простіші граничні умови. Наприклад, якщо зовнішній коефіцієнт тепловіддачі стає дуже великим, то температура стінки T_w майже збігається з температурою навколишнього середовища T_∞, і ми маємо граничну умову з постійною температурою. При малому коефіцієнті тепловіддачі різниця $T_\infty-T_w$ стає набагато більшою, ніж перепади температури усередині каналу, тоді на границі досягається умова постійності теплового потоку.

Складніші граничні умови. Можна реалізувати складніші граничні умови, застосовуючи граничну умову заданого теплового потоку або температури на стінках тільки до ділянки периметра каналу, а решту частини периметра вважати адіабатичною. Одержані раніше вирази справедливі і у тому випадку, коли на периметрі каналу існують неактивні зони (з нульовим тепловим потоком).

Проте коли на одній ділянці периметра заданий ненульовий тепловий потік, а на решті межі задана температура, то концепція області повністю розвиненого теплообміну повинна бути переглянута. Такі граничні умови можуть привести до досить нецікавих фізичних ситуацій. За умови повністю розвиненого теплообміну заданий тепловий потік надходитиме в канал через частину границі і залишатиме його через решту частини, для якої задана температура. Температурне поле не змінюватиметься по поздовжній осі z. Тому інтегрально рідина не одержуватиме або витрачатиме тепло. З обчислювальної точки зору задача вироджується на випадок чистої теплопровідності, і рух рідини не виконує ніякої ролі.

Завершальні зауваження

Як було показано вище, обмеження випадком повністю розвиненої течії дозволило зменшити розмірність задачі і спростити обчислення. Прості повністю розвинені течії описуються рівнянням теплопровідності. При розв'язанні рівняння для швидкості використовується постійний градієнт тиску як джерельний член. Для певних граничних умов існує область повністю розвиненого теплообміну, в якій профілі температури демонструють деяку подібність. Конвективний член рівняння енергії може розглядатися у вигляді джерельного члена, залежного від розподілу швидкості у поперечному перетині каналу.

Дані про перепад тиску і тепловий потік, одержані з аналізу повністю розвинених течій в каналах, можуть бути використані для характеристики довгих каналів, в яких на більшій частині довжини виконуються умови повністю розвиненої течії.