ЛЕКЦІЯ 11-12

Моделювання динамічних задач в модулі Sailab – Xcos.

Динамічний аналіз. Загальні положення

Динаміка займається вивченням поведінки конструкцій під дією змінних у часі навантажень [7]. Прикладами таких навантажень є:

- періодично діючі сили, які викликані обертанням механізмів;
- рухомі навантаження на мости і естакади;
- раптово прикладені сили (наприклад, вибухові навантаження);
- сили, викликані сейсмічними навантаженнями.

Динаміка також включає вивчення вільних коливань, тобто коливань конструкції після видалення або припинення зміни сили, яка є причиною руху.

Розглянемо представлену нижче систему з одним ступенем вільності (рис. 27). Рівняння статичної рівноваги для системи має вигляд

$$[K]\ \{u\} = \{F\}, \tag{114}$$

де $[K]$ - матриця жорсткості системи (відома);

$\{u\}$ - вектор переміщення (невідомий);

$\{F\}$ - вектор навантаження (відомий).

Це рівняння, проте, є особливим випадком загального статичного рівняння рівноваги для довільної системи: векторна сума всіх прикладених сил дорівнює нулю $\Sigma f = 0$. Загальний випадок динамічної задачі ілюструється показаною нижче одномасовою системою (рис.28), що складається з маси, жорсткості та непружного опору.

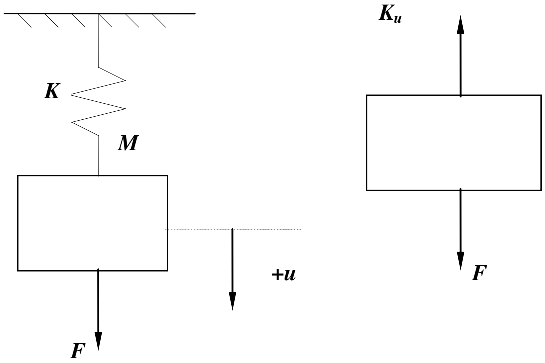

Рисунок 27 - Динамічна система з одним ступенем вільності

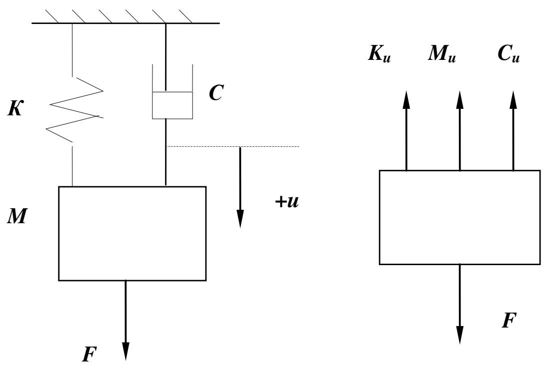

Рисунок 28 - Загальний випадок одномасової динамічної системи

Розв’язна система рівнянь має вигляд

$$[M]\ \{\ddot{u}\} + [C]\ \{\dot{u}\} + [K]\ \{u\} = \{F\}, \tag{115}$$

де $[M]$ - матриця мас системи;
$[C]$ - матриця опорів;
$[K]$ - матриця жорсткості;
$\{F\}$ - функція навантаження, яка залежить від часу;
$\{u\}$ - вектор вузлових переміщень;
$\{\dot{u}\}$ - вектор вузлових швидкостей;
$\{\ddot{u}\}$ - вектор вузлових прискорень.

Структура матриць для скінченно-елементної системи наводиться нижче.

Матриці динамічної системи

Матриця жорсткості [*K*]

Матриця жорсткості визначається виразом

$$[K] = \sum_{i=1}^{N_e} \left[K_i^e\right],$$

де N_e - число елементів; $\left[K_i^e\right]$ - матриця жорсткості окремих елементів.

Матриця мас [*M*]

Матриця мас системи визначається співвідношенням

$$[M] = \sum_{i=1}^{N_e} \left[M_i^e\right],$$

де $\left[M_i^e\right]$ - матриця мас окремих елементів.

У програмі ANSYS матриця мас елемента може бути узгодженою матрицею, матрицею зосереджених мас або зредукованою (приведеною) матрицею.

Узгоджена матриця мас елемента обчислюється з використанням функцій форми елемента. Ці функції форми такі ж, як і ті, які використовуються при обчисленні матриці жорсткості, тобто є узгодженими. Матриця мас для балкового елемента BEAM3 записується у вигляді

$$\begin{array}{l} \text{UX1} \\ \text{UY1} \\ \text{ROTZ1} \\ \text{UX2} \\ \text{UY2} \\ \text{ROTZ2} \end{array} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & 0 & x & x \\ x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & x & x \\ 0 & x & x & 0 & x & x \end{vmatrix}$$

У матриці зосереджених мас маса кожного елемента розподілена (необов'язково однаково) по його вузлах. Іншими словами, зосереджені маси, розміщені у вузлах елемента, в сукупності являють собою масу елемента. Тому матриця зосереджених мас є діагональною, тобто всі елементи матриці, окрім діагональних, дорівнюють нулю. Сума “вузлових” мас в кожному напрямку дорівнює загальній масі елемента. (Це оцінюється за допомогою команди LUMPM, ON).

$$\begin{array}{l} \text{UX1} \\ \text{UY1} \\ \text{ROTZ1} \\ \text{UX2} \\ \text{UY2} \\ \text{ROTZ2} \end{array} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Опції зосередженої маси в основному встановлюються з основного меню таким чином:

Main Menu Path: Solution → Analysis Type → Analysis Options

Деякі елементи генерують тільки зосереджені масові матриці, наприклад, COMBIN37, COMBIN39, COMBIN40.

Ряд скінченних елементів програми ANSYS (наприклад, BEAM44, PIPE59, SHELL63) мають опцію **KEYOPT**, що дозволяє використовувати зредуковану матрицю мас елемента. Ця матриця утворюється видаленням з узгодженої матриці тих її елементів, які належать до обертальних ступенів вільності.

$$
\begin{array}{l}
\text{UX1} \\
\text{UY1} \\
\text{ROTZ1} \\
\text{UX2} \\
\text{UY2} \\
\text{ROTZ2}
\end{array}
\left|
\begin{array}{cccccc}
x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
x & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\
0 & x & 0 & 0 & x & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\right|
$$

Опції цих елементів можуть бути встановлені з основного меню:

Main Menu: Preprocessor → Element Type → Add/Edit/Delete

Використовуйте кнопку **OPTION**.

Більшість скінченних елементів програми ANSYS використовує за замовчуванням узгоджену матрицю мас. У загальному випадку рекомендується використовувати матрицю мас, яка задана за замовчуванням, за винятком таких випадків:

- якщо об'єкт розрахунку має відносно малий розмір в одному (або двох) напрямках в порівнянні з рештою розмірів (наприклад, тонкі балки або дуже тонкі оболонки), то необхідно використовувати опцію зредукованої матриці мас (якщо вона доступна) або опцію матриці зосереджених мас;
- для деяких задач розповсюдження хвиль корисним виявляється використання матриці зосереджених мас.

Матриця опору [*C*]

Повний вираз для матриці опору [*C*] має вигляд

$$
[C] = \underbrace{\alpha[M]}_{\text{інерційне демпфірування}} + \underbrace{\beta[K] + \sum_{j=1}^{N_{MAT}} \beta_j [K_j]}_{\text{конструкційне демпфірування}} + \underbrace{[C_\xi]}_{\text{постійне демпфірування}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N_{EL}} [C_k]}_{\text{елементи з тертям}},
$$

де $[C_k]$ - матриця опору окремого елемента; N_{EL} - число елементів з демпфіруючими властивостями.

На практиці побудувати матрицю демпфірування такого вигляду складно, оскільки звичайно інтерес становить обчислення сухого тертя і гістерезисного (внутрішнього) демпфірування, а не в'язкого тертя. Тому демпфірування апроксимується комбінацією внесків опорів, які пов'язані з двома матрицями системи - матрицею мас і матрицею жорсткості:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K],$$

коефіцієнти α і β відомі як константи демпфірування Релея. Їх значення звичайно не відомі, оскільки більшість даних, що стосуються демпфірування, доступна у вигляді частотних коефіцієнтів загасання ξ_i, тобто у вигляді відношення фактичного значення загасання до критичного для певного режиму коливань.

Отже, при даному значенні α-демпфірування коефіцієнт демпфірування обернено пропорційний частоті. Таким чином, нижчі частоти демпфіруватимуться сильніше, а верхні - менше.

Доступне тільки одне значення, таким чином, для обчислення повинна використовуватися домінуюча частота.

Значення α встановлюється:

Main Menu: Solution→Loads→Time/Frequance→

Damping

як множник матриці мас **[ALPHAD].**

Якщо ω_i є і-ю власною круговою частотою, то параметри α і β задовольняють співвідношення

$$\xi_i = \alpha / 2\omega_i + \beta\omega_i / 2,$$

при цьому параметр α відповідає інерційному демпфіруванню, а параметр β - конструкційному.

Інерційне демпфірування (α)

Граничний випадок інерційного демпфірування реалізується при зануренні твердого тіла в масло. В цьому випадку коефіцієнт $\beta = 0$, отже,

$$\xi_i = \alpha / 2\omega_i,$$

або

$$\alpha = 2\omega_i\, \xi_i = 4\pi f_i\, \xi_i\, .$$

Таким чином, при заданому значенні α коефіцієнт загасання ξ_i обернено пропорційний частоті: нижчі частоти демпфіруються сильніше, а вищі - слабше. Для задання α використовується команда **ALPHAD.** Допускається задання тільки одного значення, тому обчислення α необхідно проводити для переважаючої частоти системи.

Конструкційне демпфірування (β)

Цей вид демпфірування пов'язаний з енергетичними втратами, які обумовлені дією сил сухого тертя. Для більшості практичних задач нехтують інерційним демпфіруванням, тобто $\alpha = 0$, отже,

$$\xi_i = \beta\omega_i / 2,$$

або

$$\beta = 2\, \xi_i / \omega_i = \xi_i / \pi f_i,$$

де $\omega_i = 2\pi f_i$, f_i - власна частота.

Таким чином, при конструкційному демпфіруванні коефіцієнт загасання ξ_i прямо пропорційний частоті: нижчі частоти загасають менше, вищі - більше.

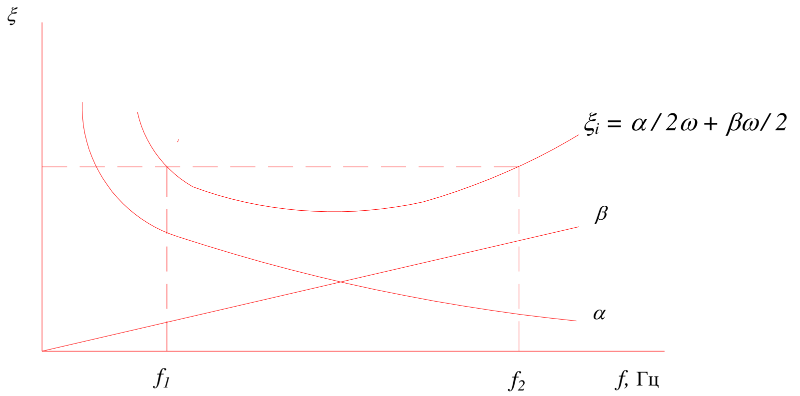

Рисунок 29 - Залежність загасання від власної частоти системи

У деяких випадках бажано задати постійне загасання в діапазоні частот. Необхідно звернути увагу на те, що сума двох функцій загасання майже постійна у області частот поблизу точки їх перетину (29). Отже, для заданого в діапазоні частот f_1 і f_2 значення коефіцієнта загасання ξ є можливість отримати значення α і β як результат розв’язання рівнянь:

$$\xi = \alpha / 4\pi f_1 + \beta\pi f_1,$$

$$\xi = \alpha / 4\pi f_2 + \beta\pi f_2.$$

Для введення коефіцієнта постійного загасання в деяких випадках можна використовувати матрицю $[C_\xi]$.

У програмі ANSYS конструкційне демпфірування можна задати у вигляді:

- постійного множника β матриці жорсткості;

- множника β_j матриці жорсткості, який залежить від властивостей матеріалу.

Також, як і α, постійний множник матриці жорсткості β встановлюється так:

Solution → Load Step Opts → Time/Frequenc → Damping

Допускається тільки одне значення, таким чином, для обчислення β повинна використовуватися домінуюча частота.

Множник β_j матриці жорсткості, який залежить від властивостей матеріалу і визначається через меню властивостей матеріалів.

Main Menu: Preprocessor → Material Props

як "демпфіруючий множник" **[DAMP].**

Множник постійної матриці жорсткості задається за допомогою команди **BETAD**. Дана команда, як і команда **ALPHAD**, допускає використання тільки одного значення параметра, тому для обчислення β повинна використовуватися переважна частота.

Залежний від властивостей матеріалу множник β_j матриці жорсткості $\lfloor K_j \rfloor$ задається як властивість матеріалу командою **MP, DAMP**. Загальне для системи конструкційне демпфірування визначається виразом

$$\sum_{j=1}^{N_{MAT}} \beta_j \lfloor K_j \rfloor,$$

де $\lfloor K_j \rfloor$ - частина матриці жорсткості, яка належать до матеріалу з індексом j; N_{MAT} - число матеріалів у моделі.

Елементи, які складаються з декількох матеріалів, подібних до SOLID46, SOLID65, SHELL91, SHELL99, визначають номер j-го матеріалу з меню:

Main Menu: Preprocessor → Material Props → Change Mat Num,

якщо номери матеріалів не задані реальними константами.

Частотно-залежна матриця демпфірування $[C_\xi]$ визначається непрямо, а саме заданням постійного коефіцієнта загасання ξ за допомогою команди **DMPRAT**. Це можливо тільки при проведенні спектрального аналізу і розрахунку відгуку на гармонійну дію, а також при аналізі перехідних процесів у режимі суперпозиції і при модальному аналізі із загасанням.

Для вказаного значення коефіцієнта ξ матриця $[C_\xi]$ обчислюється відповідно до виразу

$$\{u_i\}^T [C_\xi] \{u_i\} = 4\pi f_i \xi,$$

де f_i - частота, для якої знаходиться гармонійне розв'язання; $\{u_i\}$- власна і-та форма коливань.

При цьому матриця $[C_\xi]$ ніколи явним чином не обчислюється.

Ще одним методом введення демпфірування в програмі ANSYS є задання скінченних елементів з демпфіруючими властивостями. Ці елементи мають специфічні характеристики демпфірування. Перелік таких скінченних елементів наводиться нижче:

COMBIN14 - пружинний елемент із загасанням;

MATRIX27 - елемент з матрицею демпфірування;

COMBIN37 - керуючий елемент;

COMBIN40 - комбінований елемент;

MATRIX50 – суперелемент.

Отже, демпфірування може бути задане одним з таких способів:

1) інерційне демпфірування (команда **ALPHAD**);

2) конструкційне демпфірування:

- постійна величина β (команда **BETAD**);
- демпфірування, яке залежить від матеріалу β_j (команда **MP, DAMP**);

3) постійний коефіцієнт загасання ξ (команда **DMPRAT**, доступна не для всіх видів аналізу);

- скінченні елементи з демпфіруючими властивостями.

Види динамічного аналізу

Існують три види динамічного аналізу:

1) модальний аналіз (**ANTYPE,MODAL**);
2) динамічний аналіз перехідних процесів (**ANTYPE,TRANS**);
3) відгук на гармонійну дію (**ANTYPE**,**HARMIC**).

Всі ці види аналізу є окремими випадками розв'язання загального рівняння руху

$$[M]\ \{\ddot{u}\} + [C]\ \{\dot{u}\} + [K]\ \{u\} = \{F(t)\}.$$

Модальний аналіз

Модальний аналіз (команда **ANTYPE,MODAL**) використовується для визначення власних частот і форм коливань конструкції. Передбачається, що здійснюються вільні незгасаючі коливання, тобто

$$\{F\ (t)\} = \{0\} \text{ і } [C] = [0].$$

Модальний аналіз звичайно передує іншим видам динамічного аналізу. Як буде показано далі, результати модального аналізу дають можливість визначити деякі параметри і співвідношення, необхідні для інших видів аналізу.

Розв'язне рівняння має вигляд

$$[M]\ \{\ddot{u}\} + [K]\ \{\mathrm{u}\} = \{0\}.$$

Для лінійної системи вільні коливання будуть гармонійними:

$$\{u\} = \{u_0\} \cos \omega t.$$

Заміна $\{u\}$ і $\{\ddot{u}\}$ у розв'язному рівнянні приводить до співвідношення

$$(-\omega^2\ [M]+[K])\ \{\mathrm{u}_0\} = \{0\}.$$

Для існування нетривіальних розв'язань детермінант $[[K]\ -\ \lambda[M]]$ повинен дорівнювати нулю, тобто

$$\left\|[K]-\lambda[M]\right],$$

де $\lambda = \omega^2$.

Це задача про власні значення, яка полягає в знаходжені значення λ_j і відповідного йому вектора $\{u_j\}$. Власне значення λ_j визначає власну частоту системи $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$, а власний вектор - відповідну форму коливань.

У принципі, обчислення власних значень означає знаходження кореня полінома n -го порядку. Отже, у даному випадку потрібне ітеративне розв'язання задачі.

Для обчислення власних значень доступні чотири методи, які задаються за допомогою команди **MODOPT**:

- метод редукції (приведення) Хаусхолдера (**MODOPT, REDUC**);
- ітеративний підпросторовий метод (**MODOPT, SUBSP**);
- метод для несиметричних матриць (**MODOPT, UNSYM**);
- метод для систем із загасанням (**MODOPT, DAMP**).

Динамічний аналіз перехідних процесів

Динамічний аналіз перехідних процесів (команда **ANTYPE,TRANS**) використовується для отримання відгуку системи на дію змінного у часі або нестаціонарного, вимушувального навантаження (рис. 30).

Розв’язне рівняння рівноваги має такий вигляд:

$$[M]\ \{\ddot{u}\} + [C]\ \{\dot{u}\} + [K]\ \{u\} = \{F(t)\}.$$

У своїй найзагальнішій формі цей вид аналізу допускає використання всіх типів нелінійностей. Іншими словами, не передбачається наявність яких-небудь обмежень.

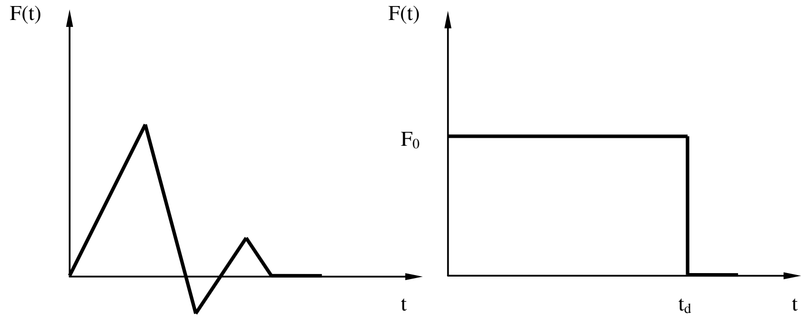

Рисунок 30 - Нестаціонарне вимушувальне навантаження

При аналізі перехідних процесів доступні такі методи розв’язання:

- повний (FULL);
- редуційний (REDUC);
- метод суперпозицій (MSUP).

Відгук на гармонійну дію

Аналіз відгуку на гармонійну дію (команда **ANTYPE**, **HARMIC**) використовується для визначення поведінки системи при дії вимушувальної гармонійної (синусоїдальної) сили, тобто при $F(t)$ у вигляді періодичного навантаження з відомою амплітудою і частотою (рис. 31).

Для лінійних і нелінійних задач динаміки перехідних процесів розв’язання загального рівняння руху полягає у визначенні переміщень як функцій часу. Вектор вимушувальної сили $\{F\}$ також є довільною функцією часу $\{F(t)\}$.

При аналізі відгуку на гармонійну дію вимушувальне навантаження передбачається гармонійним, тобто змінним синусоїдальною силою відомої амплітуди і частоти. Отже, рівняння руху може бути розв’язане стосовно переміщень як функцій частоти. Якщо система лінійна, то переміщення u також змінються синусоїдально з такою ж частотою, як і сила, але необов'язково збігається за фазою.

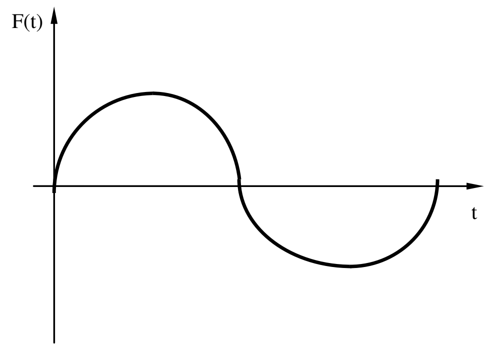

Рисунок 31 - Зміна гармонійної (синусоїдальної) сили

У даному випадку рівняння рівноваги набуває такого вигляду:

$$[M]\ \{\ddot{u}\} + [C]\ \{\dot{u}\} + [K]\ \{u\} = \{F_{max}\, e^{i\psi}\}\ e^{i\Omega t},$$

де F_{max} - амплітуда сили;

i - $\sqrt{-1}$;

t - час;

ψ - фазовий кут функції навантаження, радіан;

$\Omega = 2\pi f$ - задана кругова частота, радіан / час;

f - задана частота, число коливань / час.

Комплексний вираз для сили F можна подати у вигляді двох доданків:

$$\{F\} = \{F_{max}\, e^{i\psi}\}\, e^{i\Omega t} = \{F_{max}\, (\cos\psi + i\, \sin\psi)\, \}\, e^{i\Omega t} =$$
$$= (\{F_1\} + \mathrm{i}\{F_2\})\, e^{i\Omega t},$$

де $\{F_1\} = \{F_{max} \cos\psi\}$ - вектор дійсних складових сили;

$\{F_2\} = \{F_{max} \sin\psi\}$ - вектор уявних складових сили.

Необхідно зазначити, що задані кругова частота Ω, амплітуда F_{max} і фазовий кут ψ функції вимушувального навантаження відомі.

Як вже було сказано, всі точки системи передбачаються рухомими за синусоїдальним законом з однією і тією ж частотою, але необов'язково в одній фазі. Таким чином, вектор переміщення u може бути записаний у вигляді

$$\{u\} = \{u_{max}\, e^{i\varphi}\}\, e^{i\Omega t} = (\{u_1\} + i\{u_2\})\, e^{i\Omega t},$$

де $\{u_1\}=\{u_{max} \cos\, \varphi\}$ - вектор дійсної частини переміщення;

$\{u_2\}=\{u_{max} \sin\, \varphi\}$ - вектор уявної частини переміщення.

Зверніть увагу, що кругова частота Ω для вектора переміщення відома (така ж, як у вектора сили), тоді як амплітуда u_{max} і фазовий кут φ не відомі.

Замінимо в рівнянні рівноваги вектор переміщення $\{u\}$ і його похідні, а також вектор сили $\{F\}$ їх доданками, одержимо

$$(-\Omega^2\, [M] \;+\; i\Omega\, [C] + [K])\;\; (\{u_1\} + i\{u_2\})\, e^{i\Omega t} =$$
$$= (\{F1\} + i\{F2\})\, e^{i\Omega t},$$

або

$$(-\Omega^2\, [M] \;+\; i\Omega\, [C] + [K])\;\; (\{u_1\} + i\{u_2\}) = (\{F_1\} + i\{F_2\}).$$

Отже, розв’язання буде комплексною функцією, якщо виконується хоча б одна з таких умов:

1) $[C] \neq [0]$ (існує матриця опору);

2) $\{u\} \neq \{0\}$ (уявна частина заданих переміщень не дорівнює нулю);

3) $\{F_2\} \neq \{0\}$ (уявна частина сил не дорівнює нулю).

Доступні три методи аналізу:

- повний гармонійний аналіз (**HROPT, FULL**);
- редуційний гармонійний аналіз (**HROPT, REDUC**);
- гармонійний аналіз методом суперпозиції (**HROPT, MSUP**).