5 ФУНДАМЕНТАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗМАЩУВАННЯ

Розподіл швидкостей течії рідини, що стискається, у робочому зазорі. Розглянемо плоску течію рідини в зазорі з рухомими стінками (рис. 9), яке описується рівнянням руху [8]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}. \tag{30}$$

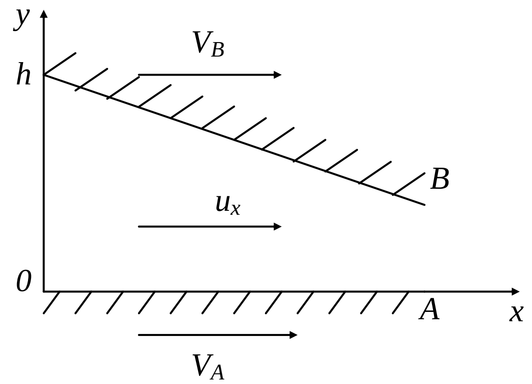

Рисунок 9 – До визначення розподілу швидкості по висоті каналу

Двічі інтегруючи рівняння руху по *y*, отримає:

$$u_x = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y^2 + C_1 y + C_2. \tag{31}$$

Постійні C_1 і C_2 визначимо, використовуючи граничні умови для швидкостей:

$$\begin{aligned} &\text{при } y=0 \qquad u_x = V_A, \quad \text{т.ч. } V_A = C_2, \\ &\text{при } y=h \qquad u_x = V_B, \quad \text{т.ч. } V_B = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} h^2 + C_1 h + C_2 \end{aligned} \tag{32}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} &C_2 = V_A, \\ &C_1 = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} h - \frac{V_A - V_B}{h}. \end{aligned} \tag{33}$$

Підставляючи постійні інтегрування, отримаємо залежність швидкості течії рідини від висоти каналу:

$$u_x = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y(h-y) - \frac{V_A - V_B}{h} y + V_A. \quad (34)$$

Швидкість за напрямом *x* включає дві складові (рис.10):

$$u_x = u_{xp} + u_{xc}, \quad (35)$$

де $u_{xp} = -\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y(h-y)$ - складова напірної течії, обумовлена перепадом тиску по осі x, є параболічною функцією координати y,

$u_{xc} = -\frac{V_A - V_B}{h} y + V_A$ - складова зсувної течії, обумовлена рухом поверхонь, і є лінійною функцією координати y.

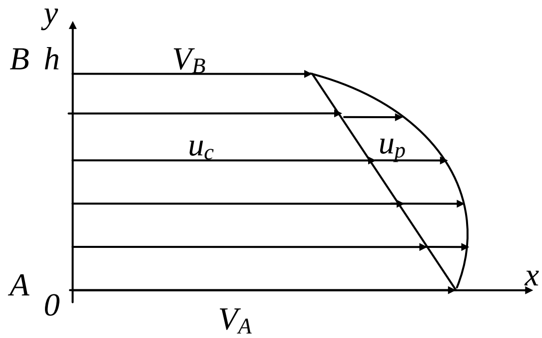

Рисунок 10 – Розподіл швидкості по висоті зазору

Вплив стиснення речовини на розподіл швидкостей і тиску представлено на рисунку 11. Завдяки стисненню швидкість зростає швидше, а тиск повільніше (зменшується градієнт тиску) [8].

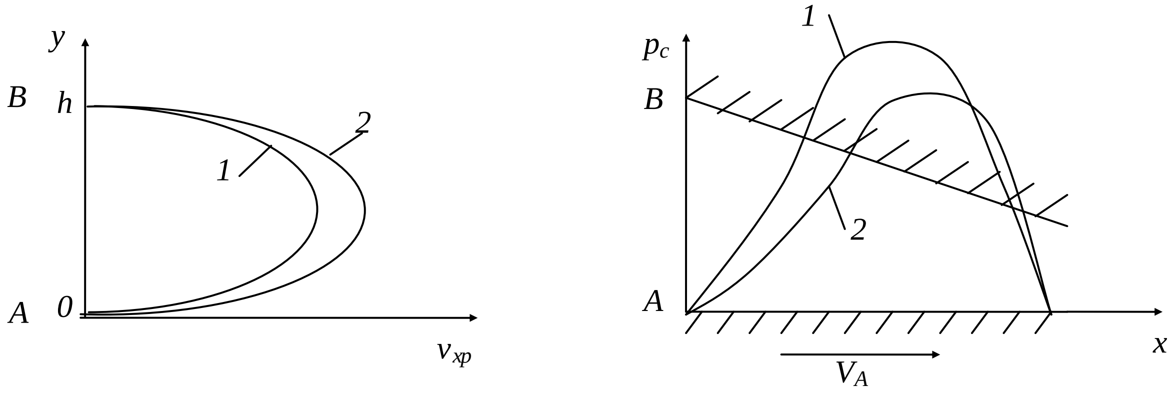

Рисунок 11 – Вплив стиснення на розподіл
напірної складової швидкості і тиску:
змащувальна речовина, що не стискається (1) та стискається (2)

Розглянемо течію рідини в плоскому каналі змінної висоти, що викликана рухом однієї стінки. Нехай стінка A рухається з постійною швидкістю $U = \omega r$, а стінка B - нерухома. Розгортка плоского каналу в окружному напрямі представлена на рисунку 12. У рівнянні руху градієнт тиску по довжині каналу (по $x = r\varphi$) лінійно зв'язаний з другою похідної швидкості по висоті зазору (по y). Градієнт функції визначає її зростання або спадання, а друга похідна – опуклість вниз або угору кривої.

При зміні товщини зазору швидкість змінюється так, що масова витрата $\rho\int_0^h u_x dy$ залишається постійною. Якщо не враховувати осьові витоки, середня швидкість $u_{cp} = u_x\big|_{y=h/2}$ збільшується із зменшенням висоти зазора h, і навпаки зменшується із збільшенням висоти зазора h. Враховуючи це, можемо представити епюри розподілу швидкості u_x по висоті каналу y для наступних ділянок (рис.12).

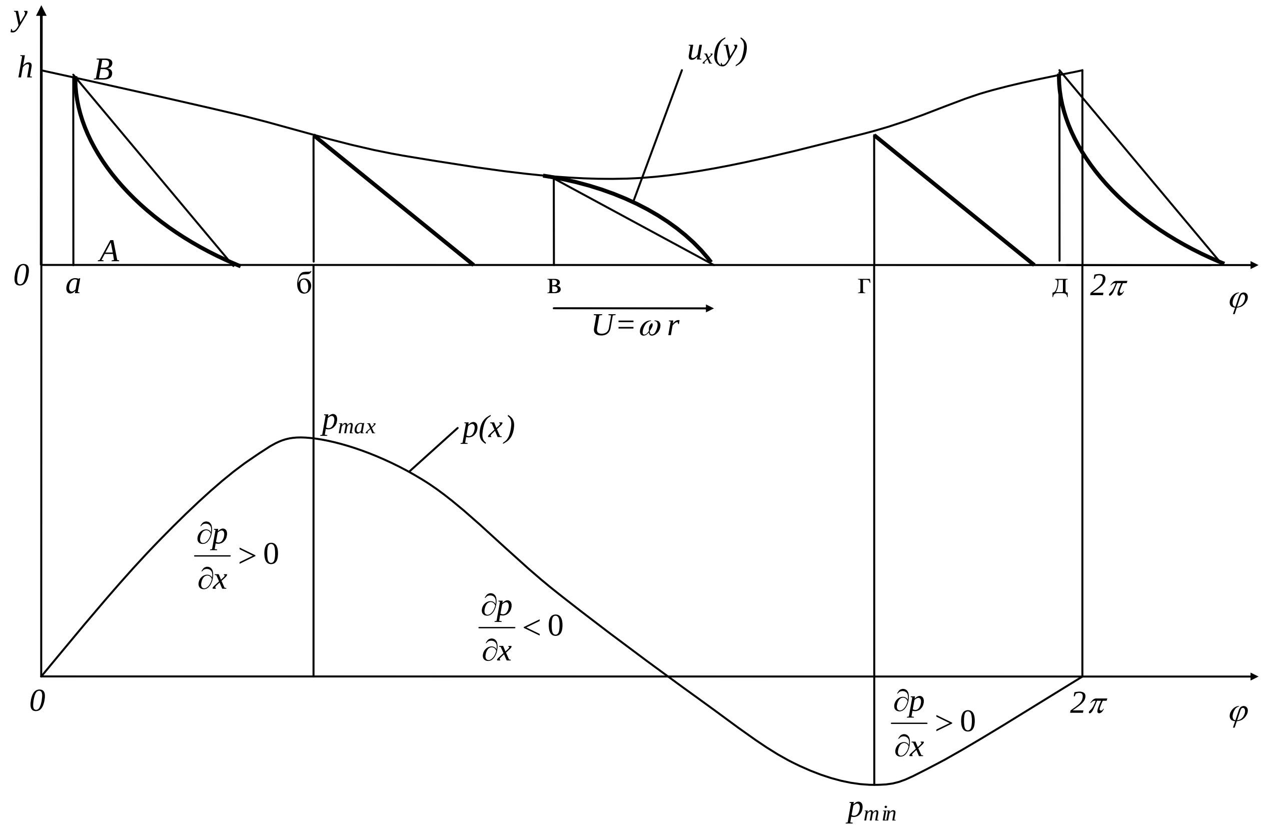

Рисунок 12 – Розподіл тиску в каналі змінної товщини

Аналогічні міркування можна провести, досліджуючи баланс витрати рідини, що не стискається,. Вважаючи $V_A = U = \omega r$ та $V_B = 0$, маємо:

$$q_x = \int_0^h u_x dy = \int_0^h \left[-\frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y(h-y) + U\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right] dy. \tag{36}$$

Тоді

$$q_x = -\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{Uh}{2}. \tag{37}$$

За умови $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ маємо лінійний розподіл швидкостей по висоті каналу, а, отже, $q_0 = \frac{Uh}{2}$. Використовуючи одержаний вираз можна зробити наступний аналіз для різних ділянок:

а:	$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$,	величина витрати q_0 зменшується, епюра швидкості опукла униз $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} > 0$;
б:	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$,	витрата дорівнює q_0, лінійний розподіл швидкості $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$;
в:	$\frac{\partial p}{\partial x} < 0$,	величина витрати q_0 збільшується, епюра швидкості опукла угору $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} < 0$;
г:	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$,	витрата дорівнює q_0, лінійний розподіл швидкості $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0$;
д:	$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$,	величина витрати q_0 зменшується, епюра швидкості опукла униз $\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} > 0$.

Розподіл надлишкового тиску ($p_{над} = p_{абс} - p_a$, де p_a - тиск подачі рідини або атмосферний тиск) у окружному напрямі для циліндричного підшипника з рідинним (рідина, що не стискається) і газовим (рідина, що стискається) змащуванням представлено на рисунку 13. Для рідинного змащування надлишковий тиск в зоні великих зазорів рівний нулю (зона кавітації). На відміну від рідини, газ не має зон кавітації, для газового змащування у області великих зазорів надлишковий тиск може приймати негативні значення (величина тиску менша за деяке значення, що найчастіше визначається тиском за межами зазору підшипника) [5,8].

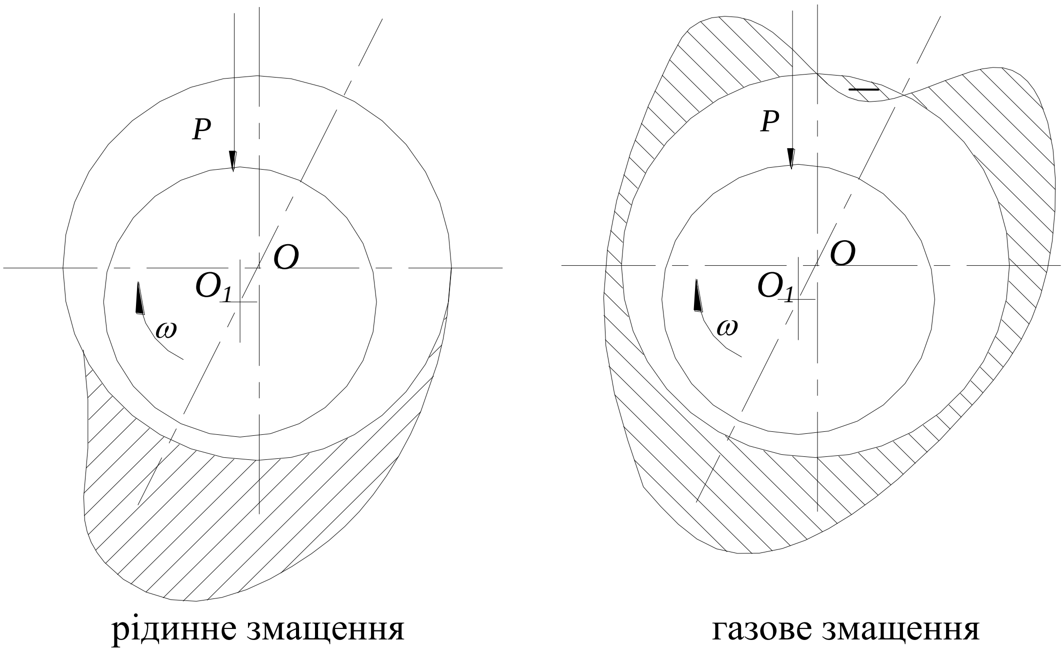

Рисунок 13 – Розподіл надмірного тиску за окружним напрямом

Осереднимо рівняння нерозривності течії рідини, що стискається, по зазору, тобто

$$\int_0^h \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho u_z)}{\partial z} \right] dy = 0, \tag{38}$$

враховуючи граничні умови для швидкостей:

$$\begin{array}{lll} \text{на стінці A} & \text{при } y = 0 & u_x = U,\ u_y = V,\ u_z = W, \\ \text{на стінці B} & \text{при } y = h & u_x = 0,\ u_y = 0,\ u_z = 0. \end{array} \tag{39}$$

При цьому скористаємося правилом Лейбніца:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} F(x,y)dy = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial F}{\partial x} dy + F(x,h_2)\frac{\partial h_2}{\partial x} - F(x,h_1)\frac{\partial h_1}{\partial x}. \tag{40}$$

Враховуючи, що густина не змінюється по висоті зазору, отримаємо:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}h+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \bar{u}_x h\right)+\rho V+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \bar{u}_z h\right)=0$$

або

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho \bar{u}_x h\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho \bar{u}_z h\right)=\rho V+h\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (41)$$

де осереднені по зазору швидкості:

$$\bar{u}_x=\frac{1}{h}\int_0^h u_x dx=\frac{q_x}{h},\ \bar{u}_z=\frac{1}{h}\int_0^h u_z dx=\frac{q_z}{h}, \qquad (42)$$

або враховуючи витрату (37), одержану раніше:

$$\bar{u}_x h=-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{Uh}{2} \text{ і } \bar{u}_z h=-\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{Wh}{2}. \qquad (43)$$

Підставляючи одержані вирази (43) в осереднене рівняння нерозривності (41), отримає фундаментальне рівняння гідродинамічної теорії змащування, або рівняння Рейнольдса на випадок нестаціонарної течії в'язкої рідини, що стискається, [5,8]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=12\rho V+6\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho Uh\right)+6\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho Wh\right)+12h\frac{\partial \rho}{\partial t}. \qquad (44)$$

Для неізотермічної течії до рівняння (44) необхідно додати рівняння для температур.

Вважаючи $\rho=const$, рівняння Рейнольдса (44) можна представити в наступному вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=12V+6\frac{\partial}{\partial x}\left(Uh\right)+6\frac{\partial}{\partial z}\left(Wh\right). \qquad (45)$$

Для повноти системи необхідно додати рівняння стану, яке описує залежність густини від тиску. При ізотермічній течії $p/\rho=const$, тоді рівняння газового змащування [8]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p^2}{\partial z}\right)=24pV+12\frac{\partial}{\partial x}\left(pUh\right)+12\frac{\partial}{\partial z}\left(pWh\right)+24h\frac{\partial p}{\partial t}. \qquad (46)$$

При переході до певного типу підшипника, необхідно лише описати залежність $h = h(x, y, z)$ і основні параметри, для визначення граничних умов для тиску.

У випадку стаціонарної течії вважають $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, $U = \omega r = const$, $V = 0$, $W = 0$, тоді спрощене рівняння, що поєднує тиск у підшипнику з його геометрією має вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p^2}{\partial z}\right) = 12U\frac{\partial}{\partial x}(ph). \tag{47}$$