М О Д У Л Ь 1, Семестр весенний

Теория алгоритмов и математическая логика

Лекция №11. Теория рекурсивных функций

Хомячок – это рекурсия.
Он ест и спит чтобы есть и спать….
(из народу)

Лектор – Шаповалов С.П.
федра компьютерных наук Сумского государственного университета

Содержание лекции.

1. Введение в теорию рекурсивных функций.

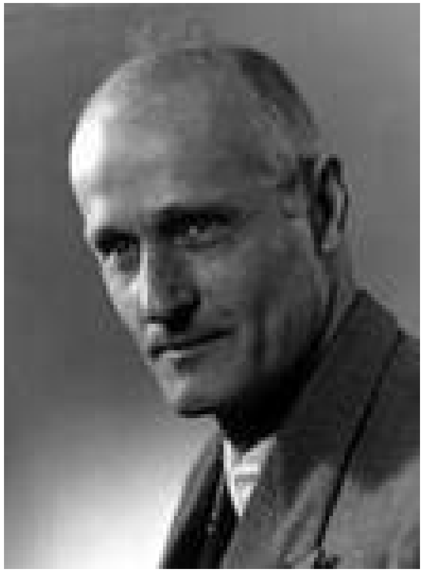
2. Базисные функции. Операции над базисными функциями.

3. Тезис Черча.

4. Эквивалентность формализаций.

Основная идея в том, что произвольный алгоритм можно свести к вычислению значения некоторой числовой функции, то есть с каждым алгоритмом можно связать функцию, которую он вычисляет. При этом возникает ряд вопросов: для любой функции существует вычислительный ее алгоритм, для каких функций алгоритмы существуют и как описана алгоритмические функции? Поиск ответа на эти вопросы и привел к созданию теории рекурсивных функций.

Исторически первой формализацией алгоритма стал класс вычислительных функций (К. Гедель, А.Черч, 1935-1936 гг).



Алонзо Чёрч (англ. *Alonzo Church*; 14 июня 1903, Вашингтон, США — 11 августа 1995, Хадсон, Огайо, США) — выдающийся американский математик и логик, внесший значительный вклад в основы информатики.

Курт Фри́дрих Гёдель (нем. *Kurt Friedrich Gödel*; 28 апреля 1906, Брюнн, Австро-Венгрия — 14 января 1978, Принстон, Нью-Джерси) — австрийский логик, математик и философ математики, наиболее известный сформулированной и доказанной им теоремой о неполноте.

Сти́вен Ко́ул Кли́ни (правильнее — **Кле́йни**, англ. *Stephen Cole Kleene*; 5 января 1909, Хартфорд (Коннектикут), Коннектикут, США — 25 января 1994, Мадисон, Висконсин, США) — американский математик.

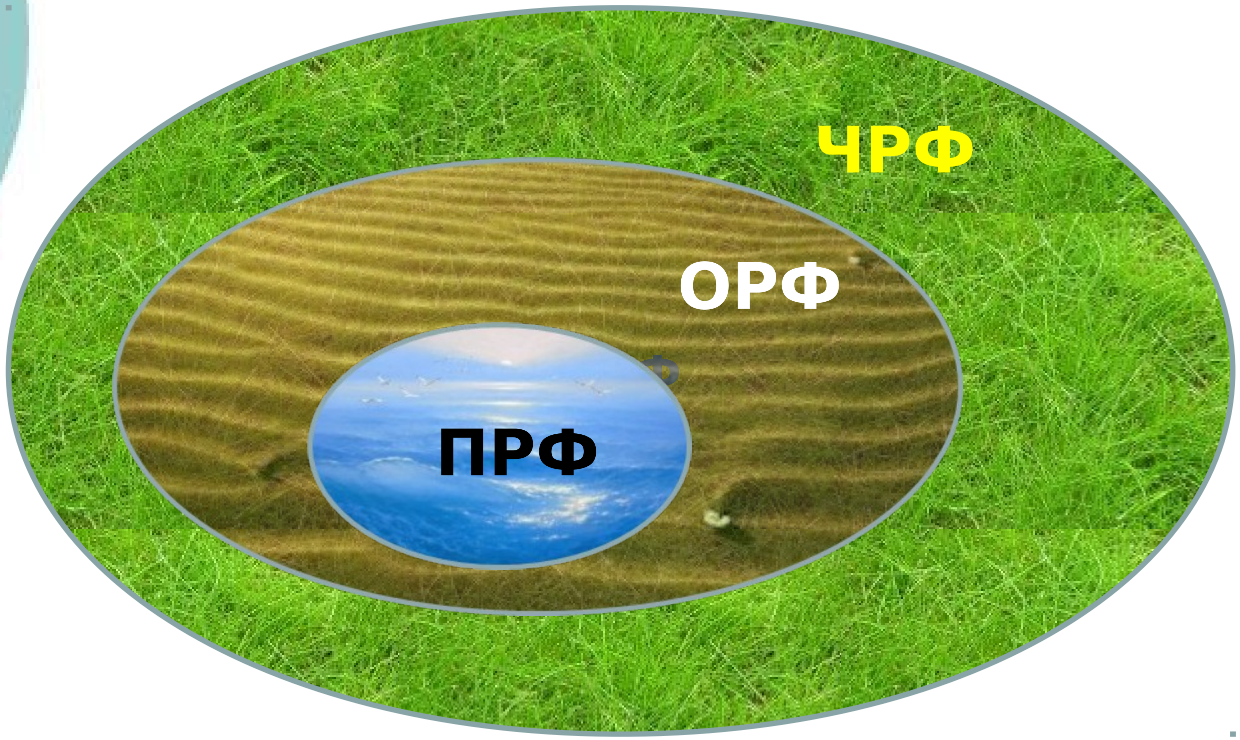
В теории вычислительных функций определяют множество натуральных чисел N = {0,1,2,3, ...} и рассматривают только числовые функции, понимая под ними функции k переменных (k - местные функции), аргументы и значения которых принадлежат N. То есть, объекты с областью определения $D_f \subseteq N^k$ (k - целое положительное) и с областью значений $R_f \subseteq N$ будем называть к - местными частными функциями. Термин "частичная" напоминает, что функция определена на подмножестве N^k (конечно, может случиться, что $D_f = N^k$, в таком случае функция становится везде определенной).

Определение . **Числовую функцию f: Nk → N называют вычислительной**, если существует алгоритм, с помощью которого можно вычислить значение функции для любого набора значений аргументов с области определения функции.

Термин «Рекурсивная функция» используют для обозначения 3-х классов функций :

- ✓ **Примитивно рекурсивные функции (ПРФ);**
- ✓ **Частично – рекурсивные функции (ЧРФ);**
- ✓ **Общерекурсивные функции (ОРФ).**

ЧРФ иногда называют просто РФ.



В дальнейшем использовали идею К. Геделя и С. Клини, за которой все вычислительные функции можно получить из множества базисных функций и алгебраических операций. Сами операции принято называть операторами.

Рассмотрим класс числовых функций, используемых в качестве базиса для построения вычислительных функций:

1. **O (x) = 0 - нуль-функция** (можно задать и n - местную ноль – функцию $\mathbf{O^n (x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0}$).

2. **S (x) = x +1 - функция следования** или преемственности (но не добавление единицы).

3. $\mathbf{I^n_m (x_1, x_2, x_3, .., x_m \ldots x_n) = x_m}$ **- функция проекции** или введения фиктивных переменных или выбора аргумента.

Это всюду определенные числовые функции, в интуитивном плане - вычислимы

В качестве операторов, применение которых в базисных функций приводит к образованию новых функций выберем следующие три оператора:

1) оператор суперпозиции;
2) оператор примитивной рекурсии;
3) оператор минимизации или минимального корня.

Каждую вычислительную функцию будем получать из некоторых простейших вычислительных базисных функций с помощью операций, вычислимость которых также не вызывает сомнения. Общая схема вычисления, которая вошла в название этого подхода - рекурсия, способ задания функции путем определения каждого ее значения в терминах ранее определенных ее значений и других уже определенных функций.

1) оператор суперпозиции

Операция суперпозиции заключается в подстановке одних арифметических функций вместо аргументов других функций.

Пусть задана m-местная функция F $(x_1, x_2, x_3, .., x_m)$ и m-ное количество n-местных функций f_1 $(x_1, x_2, x_3, .., x_n)$, f_2 $(x_1, x_2, x_3, .., x_n)$, f_3 $(x_1, x_2, x_3, .., x_n)$, ..., f_m $(x_1, x_2, x_3, .., x_n)$. Тогда говорят, что n-местная функция φ $(x_1, x_2, x_3, .., x_n)$ образовалась в результате подстановки в функцию F вместо ее аргументов m функций $f_1, f_2, f_3, ..., f_m$. Такая подстановка называется суперпозицией $S^n{}_m$. Тогда

$$S^n{}_m(F, f_1, f_2, ..., f_m) = F\,(f_1(x_1, x_2, .., x_n)\,, f_2(x_1, x_2, .., x_n),...,f_m(x_1, x_2, .., x_n)) = \varphi\,(x_1, x_2, .., x_n).$$

Пример. Получить функцию f(x)=1

Осуществить суперпозицию нуль - функции и функции следования, то есть найти $S_1^1(S(x), O(x))$.

Решение. Для определения результата операции суперпозиции нужно функцию O (x) = 0 подставить в S (x) = x +1 вместо значения аргумента. Получим

$S_1^1(S(x), O(x)) = S(O(x)) = O(x)$

Оператор суперпозиции – это оператор построения сложной функции. Если мы умеем вычислять функции f^n $g_1^m, g_2^m, \dots g_n^m$ и F_n^m, то значения функции могут быть получены последовательным вычислением значений функций $g_1^m, g_2^m, \dots g_n^m$ на некотором наборе переменных $t_1, t_2 \dots t_m$ $a_1, a_2, \dots, a_m$ и вычислением значения функции f^n на наборе значений $g_1^m(a_1, a_2, \dots a_m), g_2^m(a_1, a_2, \dots a_m), \dots g_n^m(a_1, a_2, \dots a_m)$

Пример. Найти с помощью оператора суперпозиции функцию φ(x,y), если
F(x,y,z) = 2x+y+3z-1;
f1(x,y) = x+y;
f2(x,y) = xy;
f3(x,y) = 3x+2y+1.

Решение. Используя оператор суперпозиции имеем
φ(x,y) = F(f1, f2, f3) = 2(x+y) + xy+ 3(3x+2y+1) – 1 = xy + 11x + 8y + 2.

Таким образом, оператор S_m^n есть везде определенным отображением

$$S_m^n : \Phi_m \times \Phi_n^m \to \varphi_n$$

и сохраняет вычислимость, т.е. если F, f1,f2, …fm – вычислимые функции, то и φ_n - вычислительная функция.

2) оператор примитивной рекурсии

Оператор примитивной рекурсии (R^n) позволяет строить $n+1$- местную арифметическую функцию $f(x_1, x_2, x_3, .., x_n, y)$ из двух заданных функций, одна из которых является n-местная $\varphi(x_1, x_2, .., x_n)$, а другая – $n+2$- местная функция $\psi(x_1, x_2, .., x_n, y, z)$ по следующей схеме: $f(x_1, x_2, x_3, .., x_n, 0) = \varphi(x_1, x_2, .., x_n)$;

$f(x_1, x_2, x_3, .., x_n, y+1) = \psi(x_1, x_2, .., x_n, y, f(x_1, x_2, x_3, .., x_n, y))$.

Таким образом

$$f(x_1, x_2, x_3,.., x_n, y) = R^n(\varphi,\psi).$$

Схемы примитивной рекурсии определяют функцию f только через другие функции φ и ψ, но и через значения f в предыдущих точках - значение f в точке (y +1) зависит от значения f в точке (y).

Пример. Найти значение функции $f\ (2,2)$, если она задана соотношениями

$f\ (x,\ 0) = 0;\ f\ (x,\ y+1) = f\ (x,\ y) + x.$

Решение. В данном случае по схеме примитивной рекурсии имеем:

$f\ (x,\ 0) = \varphi\ (x) = 0,$

$\psi\ (x,\ y,\ z) = y + z$. Исходя из того, что $f\ (x,\ 0) = \varphi\ (x) = 0$ при любом x, тогда и $f\ (2,\ 0) = 0$. Вычисляя последовательно, получим:

$f\ (2,\ 1) = f\ (2,\ 0) + 2 = 0 + 2 = 2;$

$f\ (2,\ 2) = f\ (2,\ 1) + 2 = 2 + 2 = 4;$

что является окончательным ответом.

Пример. Показать, что функцию

f (x,y) = x $\dot{-}$ y = $\begin{cases} x - y, \text{ если } x \geq y, \\ 0, \text{ если } x < y \end{cases}$ **можно**

получить с базисных функций с помощью оператора примитивной рекурсии.

Решение. **Покажем вначале, что функцию f (x,1) = x $\dot{-}$ 1 можно получить с базисных функций 0(x) и I_1^2 (x,y)**

Действительно

f (0,1) = 0 = 0(x,y);

f (x+1, 1) = x = I_1^2 (x,y);

Следовательно, f (x,1) = R^1(0(x), I_1^2 (x,y)).

Теперь построим схему примитивной рекурсии для f (x,y):

f(x,0) = x = I_1^2 (x,y);

f (x,y+1) = x $\dot{-}$ (y +1) = (x $\dot{-}$ y) $\dot{-}$ 1 = ψ (x, y, x $\dot{-}$ y).

Функцию ψ можно представить ψ (x, y, z) = z $\dot{-}$ 1 .

Следовательно, f (x,y) = R^2 (I_1^2 (x,y), z $\dot{-}$ 1), что и нужно было получить.

3) оператор минимизации или минимального корня.

Рассмотрим вычислительную n +1 - местную функцию f (x_1, x_2, x_3, .., x_n, x_{n+1}). Зафиксируем значение x_1, x_2, x_3, .., x_n ее первых n аргументов и рассмотрим уравнение f (x_1, x_2, x_3, .., x_n, y) = 0, т.е. найдем значение, в при котором функция равна нулю. Более сложной будет задача отыскать меньше всех значений y, при котором f (x_1, x_2, x_3, .., x_n, y) = 0. Поскольку результат нахождения зависит от x_1, x_2, ..., x_n, то и минимальное значение также их функцией. Введем обозначения

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_y\,[\,f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0],$$

Где y такое, что f (x_1, x_2, ..., x_n, y) = 0, а μ_y - оператор минимизации.

Для нахождения функции $\varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно предложить следующую процедуру.

1. Вычисляем $f(x_1, ... x_n, 0)$, если ее значение будет ноль, то $\varphi(x_1, ... x_n) = 0$. Если $f(x_1, ... x_n, 0) \neq 0$, то переходим к следующему шагу.
2. Вычисляем $f(x_1, ... x_n, 1)$, если ее значение будет ноль, то $\varphi(x_1, ... x_n) = 1$. Если $f(x_1, ... x_n, 0) \neq 0$, то переходим к следующему шагу.

И так далее, пока не найдем первое значение y, при котором $f(x_1, ... x_n, y) = 0$.

Если определится, что для всех в $f(x_1, ... x_n, y) \neq 0$, то

Пример. С помощью оператора минимизации найти функцию φ (x,y) , если f (x, y, z) = x+y-z.

Решение. $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mu_y\,[\, f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0],$

Наименьшим значением z, при котором для заданных x и y функция f равна нулю, есть x+y. Для всех значений , меньших x+y, функция определена и не равна нулю.

Следовательно, **φ (x,y) = x + y.**

Пример . Рассмотрим функцию φ (x, y) = x - y, которую можно получить с помощью μ-оператора d (x, y) = μ_z [y + z = x] = μ_z [S ((I$^3_2$ (x, y, z) , I$^3_3$ (x, y, z),)] = I$^3_1$ (x, y, z) и вычислим f (7,2).

Решение. Зададим y значение 2 и установим переменной z последовательно значения 0,1,2 .., каждый раз вычисляя сумму y + z. Как только при каком-то первом в заданном порядке z сумма равна 7, то соответствующее значение возьмем значения d (7,2). Проведем вычисления:

$z=0 \quad 2+0=2 < > 7$

$z=1 \quad 2+1=3 < > 7$

$z=2 \quad 2+2=4 < > 7$

$z=3 \quad 2+3=5 < > 7$

$z=4 \quad 2+4=6 < > 7 \quad z=5 \quad 2+5=7=7$

$$d(7,2)=5.$$