МОДУЛЬ1

Теория алгоритмов

Лекция №12. Нормальный алгоритм Маркова

Чтобы научиться что-то делать, надо делать это.
(Аристотель)

Лектор – Шаповалов С.П.
ра компьютерных наук Сумского государственного университета

Содержание лекции.

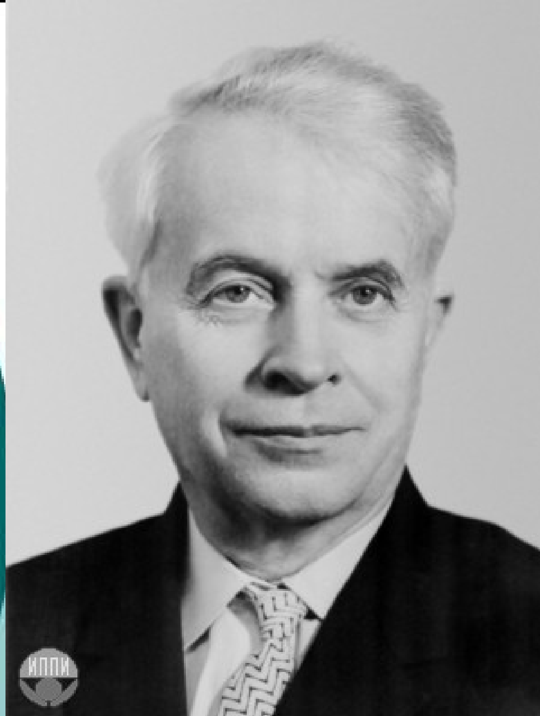
1. Понятие НАМ.
2. Краткий исторический ракурс.
3. НАМ и его применение.
4. Принцип нормализации Маркова.
5. Теорема о совпадении классов числовых функций.

Норма´льный алгори´тм Ма´ркова (**НАМ**, также **марковский алгоритм**) — один из стандартных способов формального определения понятия алгоритма .

Понятие нормального алгоритма введено А. А. Марковым (младшим) в конце 1940-х годов в работах по неразрешимости некоторых проблем теории ассоциативных вычислений.

Традиционное написание и произношение слова «алгори**ф**м» в этом термине также восходит к его автору, многие годы читавшему курс математической логики на механико-математическом факультете МГУ.

На основе НАМ был создан функциональный язык программирования Рефал.



А. А. Марков

С 1959 по 1979 г. заведующий кафедрой математической логики Московского государственного университета им. М.
.
Основные труды по теории динамических систем, топологии, топологической алгебре, теории алгоритмов и конструктивной математике.

Нормальный алгоритм Маркова - математическое построение, предназначенное для уточнения понятия алгоритм. Нормальный алгоритм Маркова:
- задается алфавитом и нормальной схемой подстановок, выполняемых по заранее определенной схеме;
- определяет преобразование строк.

Предложенный А.А. Марковым способ уточнения понятия алгоритма основан на понятии нормального алгоритма, который определяется следующим образом. Пусть задан алфавит А и система подстановок В. Для произвольного слова Р подстановки из В подбираются в том же порядке, в каком они следуют в В..Если подходящей подстановки нет, то процесс останавливается. В противном случае берется первая из подходящих подстановок и производится замена ее правой частью первого вхождения ее левой части в Р. Затем все действия повторяются для получившегося слова Р1. Если применяется последняя подстановка из системы В, процесс останавливается.

Такой набор предписаний вместе с алфавитом А и набором подстановок В определяют нормальный алгоритм. Процесс останавливается только в двух случаях: 1) когда подходящая подстановка не найдена; 2) когда применена последняя подстановка из их набора. Различные нормальные алгоритмы отличаются друг от друга алфавитами и системами подстановок.

Опыт изучения и применения математики показывает, что все известные алгоритмы можно разбить на простейшие шаги - элементарные операции. Как элементарную операцию, на базе которой построен нормальные алгоритмы, А. А. Марков предложил применить подстановку одного слова вместо другого.

Нормальные алгоритмы Маркова (НАМ) превращают строки, заданные в любом конечном алфавите, в строки в том же алфавите.

Перейдем к точным определениям. Алфавитом будем называть не пустое конечное множество E некоторых символов. Символы "→" и "•" не должны принадлежать алфавита E. Элементы алфавита называть также буквами.

Слово в алфавіті ***E*** — це скінченна, або порожня, послідовність його букв. Порожнє слово позначимо Λ . Множину всіх слів в алфавіті ***E*** позначимо через ***E****.

Пусть P, Q $\in$ E *, тогда выражения P → Q, P → • Q называются соответственно формулами простой и заключительной подстановки. При этом первая из них означает, что вместо P нужно вставить слово Q и перейти к следующей подстановки, а во второй формуле после подстановки процесс заканчивается.

Пусть P → (•) Q означает любую из формул подстановки (простую или заключительную). Нормальный алгоритм в алфавите E считается заданным, если задана конечная схема (таблица) формул подстановок слов алфавита E

$$S = \begin{cases} P_1 \to (\bullet) Q_1 \\ P_2 \to (\bullet) Q_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_n \to (\bullet) Q_n \end{cases}$$

Определение . Нормальным алгоритмом Маркова (НАМ) в алфавите Е называют пару $\langle$ Е, S $\rangle$, состоящая из алфавита Е и схемы S в алфавите.

Работу нормального алгоритма Маркова можно описать следующим образом. Пусть заданное слово $\alpha \in E^*$. Находим первую в схеме S такую формулу подстановки $\alpha_i \to (\bullet)\ \beta_i$, что αi является подсловом α . Подставляем в слово α слово βi вместо первого вхождения αi в α . Пусть γ_i - результат этой подстановки . Если формула подстановки оказалась заключительной , т.е. $\alpha_i \to \bullet\ \beta_i$, то работа алгоритма заканчивается и $A(\alpha) = \gamma_i$. Если формула подстановки оказалась простой , т.е. $\alpha_i \to \beta_i$, то к слову γ_i применяем тот же поиск , который применялся к слову α и так далее. Если в конце концов получим слово γ_i , что ни одно из слов α_1 , α_2 , ... α_n не входит в γ_i как под словом , то работа алгоритма заканчивается и $A(\alpha) = \gamma_i$. Если описанный процесс не заканчивается никогда , то говорим

Пример. Рассмотрим алгоритм заданный в алфавите Ɛ = {a, b} схеме подстановок:

$$S = \begin{cases} ab \to bb, \\ aaa \to \bullet a, \\ ba \to aa. \end{cases}$$

Применим его действие слова X = abba.

Первой подстановкой со слова "abba" получим слово X1 = bbba. Далее первая и вторая подстановка к слову X1 не действует, по третьей подстановкой со слова "bbba" получим слово X2 = bbaa, к которому применима лишь третья подстановка, которая превращает его в слово X3 = baaa. К слову X3 применимы вторая и третья подстановки, причем сначала должна выполняться вторая подстановка, но поскольку она является заключительной, то после ее действия процесс преобразования слов заканчивается. Итак, слово «baaa» переходит в слово X4 == ba. Таким образом, A (abba) = ba.

Определение нормального алгоритма Маркова, на первый взгляд, не свидетельствует о какой-то универсальность этого понятия. Однако оказывается, что класс нормальных алгоритмов имеет достаточно широкие возможности, в частности во время вычисления значений функций.

Определение . *Функция называется нормально вычислительной, если существует такой нормальный алгоритм, который вычисляет значение этой функции для любого набора значений аргументов с области определения функции и не применим к наборам значений аргументов, не входящих в область определения этой функции.*

Возникает вопрос о классе функций, которые можно вычислять с помощью нормальных алгоритмов. По этому поводу А. А. Марковым была сформулирована гипотеза, получившая название принципа нормализации Маркова.

Принцип нормализации Маркова. **Класс нормально вычислительных функций совпадает с классом вычислительных функций.**

Аналогично тому, как нельзя доказать гипотезы Черча и Тьюринга, невозможно доказать и принцип нормализации Маркова.

- *Спасибо за внимание!!!*