



Теория алгоритмов и математическая логика

Лекция №13. Теория рекурсивных функций

Хомячок – это рекурсия.
Он ест и спит чтобы есть и спать....

(из народа)



Лектор – Шаповалов С.П.
Компьютерных наук Сумского государственного
университета



Содержание лекции.



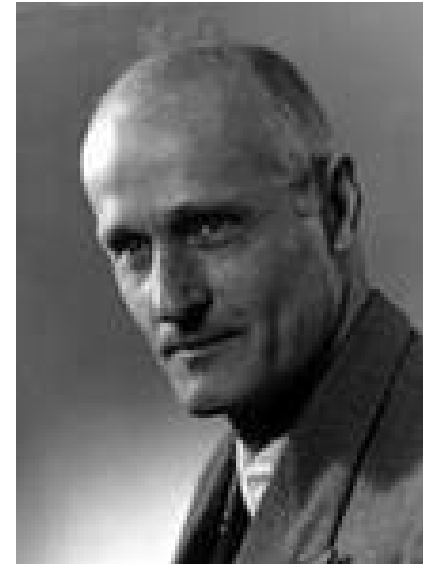
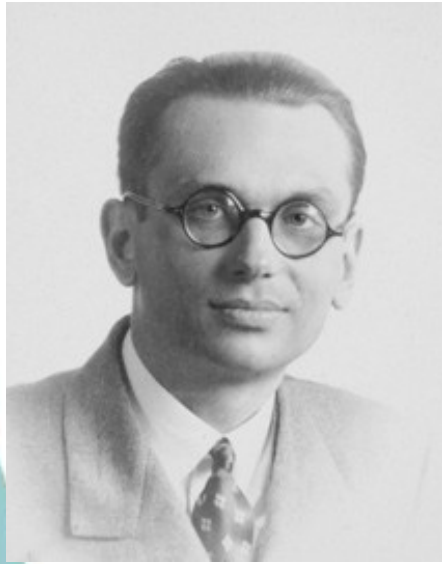
1. Введение в теорию рекурсивных функций.
2. Базисные функции. Операции над базисными функциями.
3. Тезис Черча.
4. Эквивалентность формализаций.





Основная идея в том, что произвольный алгоритм можно свести к вычислению значения некоторой числовой функции, то есть с каждым алгоритмом можно связать функцию, которую он вычисляет. При этом возникает ряд вопросов: для любой функции существует вычислительный ее алгоритм, для каких функций алгоритмы существуют и как описана алгоритмические функции? Поиск ответа на эти вопросы и привел к созданию теории рекурсивных функций.

Исторически первой формализацией алгоритма стал класс вычислительных функций (Ж. Тедель, Я. Черч, 1935-1936 гг).



Алонзо Чёрч (англ. *Alonzo Church*; 14 июня 1903, Вашингтон, США — 11 августа 1995, Хадсон, Огайо, США) — выдающийся американский математик и логик, внесший значительный вклад в основы информатики.

Курт Фридрих Гёдель (нем. *Kurt Friedrich Gödel*; 28 апреля 1906, Брюнн, Австро-Венгрия — 14 января 1978, Принстон, Нью-Джерси) — австрийский логик, математик и философ математики, наиболее известный сформулированной и доказанной им теоремой о неполноте.

Стивен Коул Клини (правильнее — **Клейни**, англ. *Stephen Cole Kleene*; 5 января 1909, Хартфорд (Коннектикут), Коннектикут, США — 25 января 1994, Мадисон, Висконсин, США) — американский математик.



В теории вычислительных функций определяют множество натуральных чисел $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ и рассматривают только числовые функции, понимая под ними функции k переменных (k - местные функции), аргументы и значения которых принадлежат N . То есть, объекты с областью определения $D_f \subseteq N^k$ (k - целое положительное) и с областью значений $R_f \subseteq N$ будем называть k - местными частными функциями. Термин "частичная" напоминает, что функция определена на подмножестве N^k (конечно, может случиться, что $D_f = N^k$, в таком случае функция становится везде определенной).

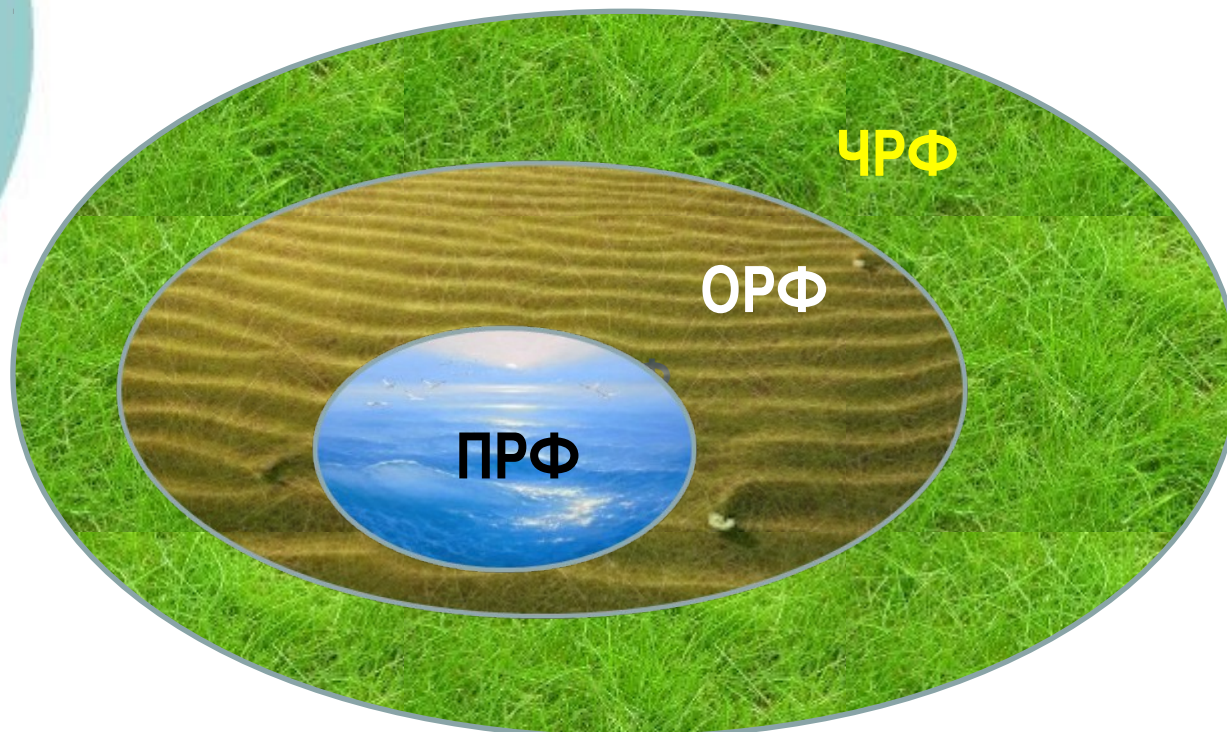
Определение . Числовую функцию $f: N^k \rightarrow N$ называют вычислительной, если существует алгоритм, с помощью которого можно вычислить значение функции для любого набора значений аргументов с области определения функции.



Термин «Рекурсивная функция» используют для обозначения 3-х классов функций :

- ✓ Примитивно рекурсивные функции (ПРФ);
- ✓ Частично – рекурсивные функции (ЧРФ);
- ✓ Общерекурсивные функции (ОРФ).

ЧРФ иногда называют просто РФ.





В дальнейшем использовали идею К. Геделя и С. Клини, за которой все вычислительные функции можно получить из множества базисных функций и алгебраических операций. Сами операции принято называть операторами.

Рассмотрим класс числовых функций, используемых в качестве базиса для построения вычислительных функций:

1. $O(x) = 0$ - **нуль-функция** (можно задать и n - местную ноль – функцию $O^n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$).
2. $S(x) = x + 1$ - **функция следования** или преемственности (но не добавление единицы).
3. $I_m^n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m, \dots, x_n) = x_m$ - **функция проекции** или введения фиктивных переменных или выбора аргумента.

Это всюду определенные числовые функции, в интуитивном плане - вычислимы



В качестве операторов, применение которых в базисных функций приводит к образованию новых функций выберем следующие три оператора:

- 1) оператор суперпозиции;
- 2) оператор примитивной рекурсии;
- 3) оператор минимизации или минимального корня.

Каждую вычислительную функцию будем получать из некоторых простейших вычислительных базисных функций с помощью операций, вычислимость которых также не вызывает сомнения. Общая схема вычисления, которая вошла в название этого подхода - рекурсия, способ задания функции путем определения каждого ее значения в терминах ранее определенных ее значений и других уже определенных функций.

1) оператор суперпозиции



Операция суперпозиции заключается в подстановке одних арифметических функций вместо аргументов других функций.

Пусть задана m -местная функция $F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ и m -ное количество n -местных функций $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, ..., $f_m(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Тогда говорят, что n -местная функция $\varphi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ образовалась в результате подстановки в функцию F вместо ее аргументов m функций $f_1, f_2, f_3, \dots, f_m$. Такая подстановка называется суперпозицией S_m^n . тогда

$$S_m^n(F, f_1, f_2, \dots, f_m) = F(f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n).$$



Пример. Получить функцию $f(x)=1$

Осуществить суперпозицию нуля - функции и функции следования, то есть найти $S_1^1(S(x), O(x))$.

Решение. Для определения результата операции суперпозиции нужно функцию $O(x) = 0$ подставить в $S(x) = x + 1$ вместо значения аргумента. Получим

$$S_1^1(S(x), O(x)) = S(O(x)) = O(x) + 1 = 0 + 1 = 1.$$



Оператор суперпозиции – это оператор построения сложной функции. Если мы умеем вычислять функции $g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m$ и f^m , то значения функции F_n^m могут быть получены последовательным вычислением значений функций $g_1^m, g_2^m, \dots, g_n^m$ на некотором наборе a_1, a_2, \dots, a_m переменных t_1, t_2, \dots, t_m и вычислением значения функции f^m на наборе значений $g_1^m(a_1, a_2, \dots, a_m), g_2^m(a_1, a_2, \dots, a_m), \dots, g_n^m(a_1, a_2, \dots, a_m)$.



Пример. Найти с помощью оператора суперпозиции функцию $\varphi(x,y)$, если

$$F(x,y,z) = 2x+y+3z-1;$$

$$f_1(x,y) = x+y;$$

$$f_2(x,y) = xy;$$

$$f_3(x,y) = 3x+2y+1.$$

Решение. Используя оператор суперпозиции имеем

$$\varphi(x,y) = F(f_1, f_2, f_3) = 2(x+y) + xy + 3(3x+2y+1) - 1 = xy + 11x + 8y + 2.$$

Таким образом, оператор S_m^n есть везде определенным отображением

$$S_m^n : \Phi_m \times \Phi_n^m \rightarrow \Phi_n$$

и сохраняет вычислимость, т.е. если F, f_1, f_2, \dots, f_m – вычислимые функции, то и φ_n – вычислительная функция.

2) оператор примитивной рекурсии



Оператор примитивной рекурсии (R^n) позволяет строить $n + 1$ - местную арифметическую функцию $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y)$ из двух заданных функций, одна из которых является n -местная $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, а другая – $n + 2$ - местная функция $\psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y, z)$ по следующей схеме: $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, 0) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$;
 $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y + 1) = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n, y, f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y))$.

Таким образом

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y) = R^n(\varphi, \psi).$$

Схемы примитивной рекурсии определяют функцию f только через другие функции φ и ψ , но и через значения f в предыдущих точках - значение f в точке $(y + 1)$ зависит от значения f в точке (y) .



Пример. Найти значение функции $f(2,2)$, если она задана соотношениями

$$f(x, 0) = 0; f(x, y+1) = f(x, y) + x.$$

Решение. В данном случае по схеме примитивной рекурсии имеем:

$$f(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$

$\psi(x, y, z) = y + z$. Исходя из того, что $f(x, 0) = \varphi(x) = 0$ при любом x , тогда и $f(2, 0) = 0$. Вычисляя последовательно, получим:

$$f(2, 1) = f(2, 0) + 2 = 0 + 2 = 2;$$

$$f(2, 2) = f(2, 1) + 2 = 2 + 2 = 4;$$

что является окончательным ответом.



Пример. Показать, что функцию

$$f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & \text{если } x \geq y, \\ 0, & \text{если } x < y \end{cases} \quad \text{МОЖНО}$$

получить с базисных функций с помощью оператора примитивной рекурсии.

Решение. Покажем вначале, что функцию $f(x, 1) = x \dot{-} 1$ можно получить с базисных функций $0(x)$ и $I_1^2(x, y)$

Действительно

$$f(0, 1) = 0 = 0(x, y);$$

$$f(x+1, 1) = x = I_1^2(x, y);$$

Следовательно, $f(x, 1) = R^1(0(x), I_1^2(x, y))$.

Теперь построим схему примитивной рекурсии для $f(x, y)$:

$$f(x, 0) = x = I_1^2(x, y);$$

$$f(x, y+1) = x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = \psi(x, y, x \dot{-} y).$$

Функцию ψ можно представить $\psi(x, y, z) = z \dot{-} 1$.

Следовательно, $f(x, y) = R^2(I_1^2(x, y), z \dot{-} 1)$, что и нужно было получить.



3) оператор минимизации или минимального корня.

Рассмотрим вычислительную $n + 1$ - местную функцию $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$. Зафиксируем значение $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ее первых n аргументов и рассмотрим уравнение $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y) = 0$, т.е. найдем значение, при котором функция равна нулю. Более сложной будет задача отыскать меньше всех значений y , при котором $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y) = 0$. Поскольку результат нахождения зависит от x_1, x_2, \dots, x_n , то и минимальное значение также их функцией. Введем обозначения

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_y [f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0],$$

Где y такое, что $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$, а μ_y - оператор минимизации.



Для нахождения функции $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно предложить следующую процедуру.

1. Вычисляем $f(x_1, \dots, x_n, 0)$, если ее значение будет ноль, то $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$. Если $f(x_1, \dots, x_n, 0) \neq 0$, то переходим к следующему шагу.

2. Вычисляем $f(x_1, \dots, x_n, 1)$, если ее значение будет ноль, то $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 1$. Если $f(x_1, \dots, x_n, 0) \neq 0$, то переходим к следующему шагу.

И так далее, пока не найдем первое значение y , при котором $f(x_1, \dots, x_n, y) = 0$.

Если определится, что для всех y $f(x_1, \dots, x_n, y) \neq 0$,



Пример. С помощью оператора минимизации найти функцию $\varphi(x, y)$, если $f(x, y, z) = x + y - z$.

Решение. $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu_y [f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0]$,

Наименьшим значением z , при котором для заданных x и y функция f равна нулю, есть $x + y$. Для всех значений, меньших $x + y$, функция определена и не равна нулю.

Следовательно, $\varphi(x, y) = x + y$.

Пример . Рассмотрим функцию $\varphi (x, y) = x - y$, которую можно получить с помощью μ -оператора $d (x, y) = \mu_z [y + z = x] = \mu_z [S ((I^3_2 (x, y, z) , I^3_3 (x, y, z),)) = I^3_1 (x, y, z)$ и вычислим $f (7,2)$.

Решение. Зададим y значение 2 и установим переменной z последовательно значения 0,1,2 ..., каждый раз вычисляя сумму $y + z$. Как только при каком-то первом в заданном порядке z сумма равна 7, то соответствующее значение возьмем значения $d (7,2)$. Проведем вычисления:

$$z=0 \quad 2+0=2 < > 7$$

$$z=1 \quad 2+1=3 < > 7$$

$$z=2 \quad 2+2=4 < > 7$$

$$z=3 \quad 2+3=5 < > 7$$

$$z=4 \quad 2+4=6 < > 7 \quad z=5 \quad 2+5=7=7$$

$$d(7,2)=5.$$