

## ЛЕКЦІЯ 7

### ГЕНЕРУВАННЯ ВІБРАЦІЙ ТИПОВИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ РІЗНОМАНІТНИХ ПО КОНСТРУКЦІЇ І ПРИЗНАЧЕННЮ МАШИН

#### Генерування вібрацій у процесі зіткнень деталей у кінематичних парах

У працюючій машині можна розрізнити три види фізичних процесів:

- рух його деталей;
- взаємний обмін енергією (а іноді й речовиною) із зовнішнім середовищем;
- руйнування деталей.

Руйнування деталей приводить до зміни стану машини, визначення якого становить завдання діагностики. Процеси взаємодії машини із зовнішнім середовищем служать діагностичним сигналом. І, нарешті, завдяки руху машини встановлюється зв'язок між станом її деталей і діагностичним сигналом. Нижче розглянутий рух деталей, сполучених у кінематичні пари.

Будь-який фізичний об'єкт при аналізі можна ідеалізувати багатьма способами - все залежить від поставленої мети. Так, у теорії механізмів і машин розглядаються схеми технічних пристроїв, у яких кінематичні ланцюги замкнуті. Така ідеалізація приводить до одновимірного динамічного завдання. Всі рухомі маси і сили, що діють на них, вдається звести до однієї точки вибраної ланки приведення і замість аналізу складної системи, якою, безумовно, є будь-яка машина, обмежитися розглядом руху матеріальної точки з одним ступенем свободи. Такі схеми механізмів, що ідеалізуються, служать для пояснення простих властивостей їх руху і успішно використовуються при проектуванні.

Реальна машина завжди має внутрішні ступені свободи, пов'язані з наявністю зазорів у кінематичних парах та інших дефектів. Для діагностики ця обставина є істотною, оскільки машина виступає як система з багатьма ступенями свободи.

Точна постановка завдання про рух реальної машини вимагає складання і розв'язання багатовимірної системи диференціальних рівнянь, порядок якої дорівнює подвоєному числу ступенів свободи механізму. Якщо  $n$  - число рухомих деталей, складових машину, то порядок системи буде принаймні  $12n$ . Зрозуміло, такий підхід до завдання про рух механізму нереальний і привів би до необхідності відмовитися від його вирішення. Тому першим кроком у спрощенні завдання буде розгляд відносного руху деталей, сполучених у кінематичну пару, ізольовано від руху інших елементів машини. Сили, що діють на деталі даної пари, з боку пов'язаних з нею елементів вважатимемо заданими і незалежними від стану цих елементів.

*Так, при аналізі радіального руху вала в підшипнику із зазором не враховуватиметься вплив на цей рух похибок зачеплення зубчатого колеса, що знаходиться на цьому валу. І, навпаки, при аналізі взаємодії коліс, нехтуватимемо зазорами в підшипниках валів машини.* Таке спрощення у відомих межах допустимо, оскільки практично спостережувані зміни стану деталей у результаті зносу або технологічних порушень невеликі і їх прояви під час роботи машини носять локальний характер.

Деталі машини під час роботи здійснюють складні рухи, але необхідно відмовитися від спроби простежувати рух кожної деталі у всій його складності, а

необхідно зосередити увагу тільки на переміщенні деталей один щодо одного за паразитними ступенями свободи. Це другий крок в ідеалізації даних явищ. І, нарешті, третім кроком у цьому напрямку, пов'язаним із специфікою проблеми вібродіагностики, буде концентрація уваги тільки на одній стороні відносного руху деталей, сполучених у кінематичну пару, - на процесі їх зіткнення.

### ***Зіткнення деталей***

Найважливішою характеристикою кінематичної пари, що визначає її ресурс і ефективність функціонування, буде закон взаємодії деталей. Сили, що діють між пов'язаними деталями, можна поділити на квазістатичні (постійні або змінні поволі), сили тертя та імпульсні.

Вони різняться між собою характером зміни в часі. Силу  $q(t)$  можна вважати квазістатичною, якщо

$$\max \left| \frac{dq(t)}{dt} \right| \frac{L}{c} \ll q_{\max}, \quad (16)$$

де  $L$  - характерний лінійний розмір механізму;

$c$  - швидкість поширення пружних коливань у матеріалі механізму.

Якщо характер зміни сили такий, що спочатку вона повільно збільшується до максимального значення  $q_{\max}$ , а потім зменшується до первинного рівня, причому весь цей процес займає час  $\tau$ , то умову (16) можна замінити наближеним співвідношенням

$$\frac{q_{\max}}{2\tau} \frac{L}{c} \ll q_{\max}. \quad (17)$$

### ***Взаємодія деталей у момент зіткнення***

Центрами збудження коливань у машині є зони контакту деталей у момент їх зіткнення. Через пружність матеріалу деталі, що зіткнулися, ще деякий час продовжують рухатися назустріч одна одній, щоправда, зі швидкістю, що поступово зменшується. Поверхні зіткнення деталей деформуються, зона їх контакту збільшується, а отже зростає і сила, з якою деталі тиснуть одна на одну. Під дією цієї сили відносна швидкість зближення деталей загасає; на якусь мить вони зупиняються, а потім сили пружності, викликані їх деформацією, примушують деталі розійтися.

Металеві деталі володіють великою жорсткістю, тому зона їх контакту і деформації стиснення під час зіткнення незначні, отже, їх зіткнення триває малий час, порядку  $\tau = 10^{-4}$  с. Для різних пар  $\tau$  змінюється від 1 до  $10^{-4}$  с. Між деталями виникають величезні сили, інакше вони не могли б змінити їх рух за такий короткий час. Для ілюстрації наведемо простий приклад.

Нехай тривалість зіткнення  $\tau = 10^{-4}$  с, а відносна швидкість деталей у момент удару  $v_0 = 1$  м/с. Такі й навіть великі швидкості зіткнення деталей часто

зустрічаються в механізмах. За половину інтервалу  $\tau$  швидкість зближення деталей змінюється від  $v_0$  до 0. Використавши відоме співвідношення механіки, що пов'язує імпульс сили і зміну кількості руху, знайдемо середню силу, що діє на деталі:

$$F = \frac{2mv_0}{\tau}.$$

Якщо наведена маса деталей, що стикаються, дорівнює 5 кг, то  $F = 10^5 \text{ н} \approx 10m$ . У зв'язку з такими великими силами, що виникають при ударі, рештою всіх сил, що діють на тіла, які співударяються, як правило, можна нехтувати, надалі так і робитимемо.

Зіткнення деталей характеризуються малою тривалістю, величезними силами взаємодії, а також дуже великими градієнтами напруги. У малій області зіткнення деталей тиск змінюється від декількох тисяч атмосфер до нуля. У зв'язку з цим можна вказати декілька поширених видів зносу, які безпосередньо викликаються зіткненнями в кінематичних парах: відшарування металу, пітинг та ін. Контактні явища і супроводжувальні їх зіткнення істотно впливають на надійність і довговічність механічних пристроїв.

*Основи теорії зіткнення твердих тіл у кінці минулого століття розробив Р. Герц.*

У цій теорії прийняті такі припущення:

- лінійні розміри зони контакту дотичних тіл мал порівняно з радіусом кривизни їх поверхонь зіткнення;
- матеріал при деформації підлягає закону Гука;
- сила, що стискає деталі, нормальна до поверхні торкання.

Ці припущення здаються досить грубими, а тим часом, теорія Герца дає результати, що добре узгоджуються з експериментом для широкого діапазону умов. Теорія Герца подається майже у всіх підручниках теорії пружності, тому наведемо лише декілька формул і стисло їх пояснимо. Сконцентруємо увагу на двох питаннях: на формі імпульсу зіткнення деталей і на тривалості процесу зіткнення. Оскільки джерелом збудження коливань механізму є зіткнення деталей, то від вказаних чинників істотно залежить характер акустичного сигналу.

При зіткненні двох пружних тіл їх поверхні деформуються. Величина деформації  $\lambda$  залежить від сили, що стискає тіла, від радіусів кривизни контактуючих поверхонь і пружних констант матеріалу. Позначимо відстань, на яку зближуються дотичні тіла при дії на них стискальної сили  $\psi$ . Зв'язок між силою  $\psi$  і переміщенням визначається співвідношенням

$$\psi = k\lambda^{3/2}, \quad (18)$$

де  $k$  - стала, що залежить від геометрії дотичних поверхонь і констант матеріалу:

$$k = \frac{\pi q}{D\sqrt{A+B}}; \quad (19)$$

$D$  - характеристика пружних властивостей матеріалу дотичних тіл

$$D = \frac{3}{4} \left( \frac{1 - \sigma_1^2}{E_1} + \frac{1 - \sigma_2^2}{E_2} \right);$$

$\sigma_1, \sigma_2$  - коефіцієнти Пуассона;

$E_1, E_2$  - модулі пружності матеріалу першого і другого тіл.

Для сталі  $\sigma = 0.28$ ,  $E = 2 \cdot 10^{11}$  н/м<sup>2</sup>.

Величини  $A$  і  $B$  визначаються геометрією поверхонь і можуть бути знайдені з таких співвідношень:

$$2(A + B) = \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R''_1} + \frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R''_2};$$

$$2(A + B) = \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right)^2 + \left( \frac{1}{R''_1} - \frac{1}{R''_2} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{R'_1} - \frac{1}{R'_2} \right) \left( \frac{1}{R''_1} - \frac{1}{R''_2} \right) \cos \varphi,$$

де  $R'_1$  і  $R''_1$  - радіуси кривизни першого тіла в точці контакту;

$R'_2$  і  $R''_2$  - радіуси кривизни другого тіла (знаки радіусів кривизни позитивні, якщо центри кривизни розміщені усередині тіла, інакше вони негативні);

$\varphi$  - кут між нормальними перетинами, в яких радіуси кривизни поверхні  $R'_1$  і  $R''_1$ .

$$\cos \varphi = \frac{A - B}{A + B}.$$

Параметр  $q$ , що входить у формулу (19), є функцією кута  $\varphi$  (табл.1).

Таблиця 1- Залежність параметра  $q$  від кута  $\varphi$

| $\varphi$ | 10    | 20    | 30    | 40   | 50    | 60   | 70    | 80    | 90    |
|-----------|-------|-------|-------|------|-------|------|-------|-------|-------|
| $q$       | 1.145 | 0.666 | 0.513 | 0.43 | 0.382 | 0.35 | 0.332 | 0.321 | 0.318 |

Так, при стисненні двох куль з радіусами  $R_1$  і  $R_2$  з однакового матеріалу коефіцієнт  $k$  визначається такою формулою:

$$k = \frac{2}{3} \frac{E}{1 - \sigma^2} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}}. \quad (7.12)$$

При зіткненні кулі радіусом  $R$  з плоскою поверхнею того ж матеріалу коефіцієнт

$$k = \frac{2}{3} \frac{E}{1 - \sigma^2} \sqrt{R}. \quad (7.13)$$

Наведені вище формули можна використовувати для дослідження зіткнення деталей, якщо нехтувати незворотними втратами механічної енергії, якою володіли тіла до зіткнення.

Потенційна енергія деформації тіл  $U$  і сила  $\psi$ , що стискає їх, пов'язані співвідношенням

$$\frac{dU}{d\lambda} = \psi. \quad (20)$$

Підставляючи  $\psi$  із співвідношення (17) у вираз (20) і інтегруючи останній вираз, отримаємо

$$U = \frac{2}{5} k \lambda^{5/2}. \quad (21)$$

Кінетична енергія тіл, що співударяються, під час удару

$$T = \frac{m}{2} \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2. \quad (22)$$

Повна енергія зіткнення дорівнює сумі потенційної і кінетичної енергій з урахуванням початкової кінетичної енергії зіткнення:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + \frac{2}{5} k \lambda^{5/2} = \frac{m v_0^2}{2}, \quad (23)$$

$$m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2};$$

де  $m$  - наведена маса  
 $m_1$  і  $m_2$  - маси тіл, що стикаються.

Максимальне стиснення  $\lambda_{\max}$  спостерігається тоді, коли відносна швидкість зближення  $\frac{d\lambda}{dt}$  дорівнює нулю. Тому з виразу (23) отримуємо

$$\lambda_{\max} = \left( \frac{5 m}{4 k} \right)^{2/5} v_0^{4/5}. \quad (24)$$

Тривалість зіткнення  $\tau$  дорівнює подвоєному часу від початку зіткнення тіл до їх зближення на величину  $\lambda_{\max}$ . З виразу (24) тривалість зіткнення дорівнює інтегралу

$$\tau = 2 \int_0^{\lambda_{\max}} \frac{d\lambda}{\sqrt{v_0^2 - \frac{4 k}{5 m} \lambda^{5/2}}} \frac{2.94 \left( \frac{5 m}{4 k} \right)^{2/5}}{v_0^{1/5}}. \quad (25)$$

Необхідно звернути увагу на слабку залежність  $\tau$  від швидкості зіткнення тіл  $v_0$  (як корінь п'ятого степеня від  $v_0$ ). Ця величина майже цілком визначається їх масами і жорсткістю контакту  $k$ .

Введемо у формулу (25) величину зазору - основну характеристику стану кінематичної пари, за допомогою співвідношення (16):

$$\tau = 2,94 \left( \frac{1,22}{Fh_0k^4} \right)^{1/10} m^{1/2}. \quad (26)$$

Тривалість зіткнення деталей дуже мало залежить від зазору і навантаження на деталь  $F$  ( $Fh_0$  - кінетична енергія удару). В основному вона визначається масою деталей  $m$  і жорсткістю їх контакту  $k$ , тобто параметрами, які практично не змінюються при експлуатації машини. Тому тривалість зіткнення можна вважати константою кінематичної пари і використовувати її для виділення сигналу, який генерується цією парою.

Теорія Герца дає формулу, що визначає форму імпульсу зіткнення деталей. Наростання і спад сили, що стискає їх, відбувається за законом півхвилі синусоїди:

$$\psi(t) = \frac{3,35m v_0}{\tau} \sin \frac{\pi}{\tau} t \quad \text{для} \quad 0 \leq t \leq \tau; \quad (27)$$

$$\psi(t) = 0 \quad \text{для} \quad t > \tau.$$

Вираз  $m v_0$  відповідає кількості руху деталей у момент зіткнення.

Максимальна сила взаємодії деталей спостерігається у момент часу  $\frac{\tau}{2}$ :

$$\psi_{\max} = \frac{3,35m v_0}{\tau}. \quad (28)$$

Силу можна виразити також через величину зазору  $h_0$  у кінематичній парі:

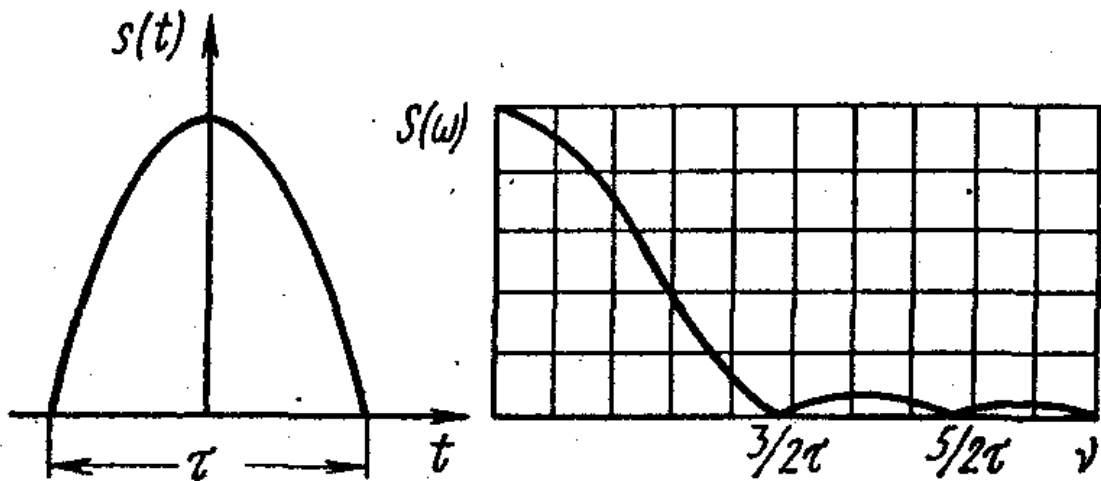
$$\psi_{\max} = 4,69 \frac{\sqrt{mFh_0}}{\tau}. \quad (29)$$

Залежність величини зближення деталей від часу при ударі також підлягає закону півхвилі синусоїди:

$$\lambda = \lambda_{\max} \sin \frac{\pi}{\tau} t \quad (30)$$

$$\lambda = 0 \quad \text{для} \quad t \geq \tau.$$

Форма імпульсу і його спектр зображені на рис.13. Спектр імпульсу зіткнення деталей визначається формулою (30)



Рисункок 13 - Імпульс і його спектр

$$S(\omega) = 2q_0 \frac{\cos \frac{\omega\tau}{2}}{1 - \left(\frac{2}{\pi} \frac{\omega\tau}{2}\right)^2}. \quad (31)$$

Підставляючи в (31) величини з виразу (29), знаходимо

$$Q(\omega) = 1,07m\nu_0 \frac{\cos \frac{\omega\tau}{2}}{1 - \left(\frac{2}{\pi} \frac{\omega\tau}{2}\right)^2} \quad (32)$$

або, виражаючи через зазор у кінематичній парі, матимемо

$$Q(\omega) \approx 1,5\sqrt{mFh_0} \frac{\cos \frac{\omega\tau}{2}}{1 - \left(\frac{2}{\pi} \frac{\omega\tau}{2}\right)^2}. \quad (33)$$

У теорії Г. Герца не враховуються втрати енергії, зокрема на збудження коливань у тілах, що співударяються. Це допущення здається неправдоподібним, особливо при розгляді вібраційних явищ, які відбуваються в машинах.

Колівання в машинах збуджуються зіткненнями деталей, ці коливання відносять частину енергії із зони контакту тіл, що стикаються, і ця енергія, потім розсіюється. Але припущення, яке виявляється грубим, про збереження енергії під

час удару стає прийнятним, якщо оцінити величину енергії, що втрачається на збудження коливань.

Для цієї мети використовують формулу, що виражає відношення енергії збуджених коливань  $E_2$  до початкової енергії  $E_1$  зіткнення двох куль:

$$\frac{E_2}{E_1} \approx \frac{1}{50} \frac{v_0}{c}, \quad (34)$$

де  $c$  - швидкість поширення пружних коливань у матеріалі тіл, що стикаються.

Візьмемо  $v_0 = 1$  м/с;  $c = 5 \cdot 10^3$  м/с, тоді

$$\frac{E_2}{E_1} \approx 4 \cdot 10^{-6} = 0,0004\%.$$

Для тіл, форма яких відрізняється від кулястої, відношення енергії коливань до енергії удару, що порушив їх, буде іншим, але також малим. І це не повинно дивувати, оскільки вібрація, як правило, має справу з дуже малими енергіями. Так, больове відчуття викликає потік звукової енергії всього в  $10^{-6}$  Вт/м<sup>2</sup>.